

*Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский*  
**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ**

Книга посвящена приближенным асимптотическим методам решения задач теории нелинейных колебаний, встречающихся во многих областях физики и техники. Второе издание дополнено изложением некоторых методов, весьма широко использующихся сейчас на практике. Увеличено количество примеров решений типичных задач. Книга рассчитана на широкий круг инженерно-технических и научных работников, интересующихся колебательными процессами.

Содержание

Предисловие ко второму изданию	5
Предисловие к первому изданию	6
Введение	7
<b>Глава I. Собственные колебания в системах, близких к линейным</b>	<b>36</b>
§ 1. Построение асимптотических решений	36
§ 2. Консервативные системы, близкие к линейным	49
§ 3. Случай нелинейного трения	60
§ 4. Автоколебательные системы	68
§ 5. Стационарные амплитуды и их устойчивость	76
§ 6. Построение стационарных решений	86
§ 7. Эквивалентная линеаризация нелинейных колебательных систем	93
§ 8. Нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами	107
<b>Глава II. Метод фазовой плоскости</b>	<b>116</b>
§ 9. Траектории на фазовой плоскости. Особые точки	116
§ 10. Метод Льенара	133
§ 11. Релаксационные колебательные системы	144
§ 12. Метод А. А. Дородницына для уравнения Ван-дер-Поля	148
<b>Глава III. Влияние внешних периодических сил</b>	<b>155</b>
§ 13. Асимптотические разложения в «нерезонансном» случае	155
§ 14. «Резонансные» случаи	170
§ 15. Воздействие синусоидальной силы на нелинейный вибратор	185
§ 16. Воздействие синусоидальной волны на нелинейную систему с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков	198
§ 17. Параметрический резонанс	209
§ 18. Воздействие периодических сил на релаксационную систему	221
§ 19. Воздействие «периодических» сил на нелинейные системы с медленно меняющимися параметрами	232
<b>Глава IV. Одночастотные колебания в нелинейных системах со         многими степенями свободы</b>	<b>247</b>
§ 20. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы	247
§ 21. Собственные одночастотные колебания в системах со многими	259

степенями свободы, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка	
§ 22. Влияние внешних периодических сил на одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы	270
§ 23. Исследование одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы при наличии медленно меняющихся параметров	281
<b>Глава V. Метод усреднения</b>	<b>297</b>
§ 24. Уравнения первого и высших приближений в методе усреднения	297
§ 25. Случай быстро врачающейся фазы	315
<b>Глава VI. Обоснование асимптотических методов</b>	<b>327</b>
§ 26. Обоснование метода усреднения	327
§ 27. Преобразование основной системы уравнений	332
§ 28. Некоторые свойства решений преобразованных уравнений в окрестности точек равновесия и замкнутых орбит	355
§ 29. Соответствие между точными и приближенными решениями основного уравнения на бесконечном интервале	379
§ 30. Периодические и почти периодические решения	386
Литература	407

## **ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ**

Настоящее издание этой книги по сравнению с первым изданием, вышедшим в 1955 г. под тем же названием, имеет следующие отличия.

Систематизирован и облегчен ряд разделов, связанных с методом гармонического баланса. Заново переработан параграф, посвященный рассмотрению «резонансных» случаев. Расширено содержание последней главы, посвященной вопросам математического обоснования асимптотических методов.

Изложение книги дополнено новой главой, посвященной рассмотрению одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы, а также более подробным изложением метода медленно меняющихся параметров, который в настоящее время весьма широко используется на практике.

Кроме того, в настоящее издание внесены различные более мелкие дополнения, уточнения и исправления, о которых мы не упоминаем.

В связи с изменением объема книги авторы несколько изменили также принятую ранее нумерацию глав и параграфов.

При подготовке второго издания авторы стремились учесть ценные замечания, сделанные им различными лицами, которым они выражают свою признательность.

Авторы также благодарят аспиранта О. Б. Лыкову за помощь при подготовке к печати настоящего издания.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время вопросы нелинейных колебаний привлекают к себе большое внимание в самых различных областях техники и физики.

Весьма эффективным средством для исследования нелинейных колебаний являются методы асимптотических разложений по степеням малого параметра. С их помощью в большом числе практически важных случаев удается получить сравнительно простые расчетные схемы и детально выяснить характер протекания колебательного процесса.

В связи с этим чувствуется потребность в книге, в которой соответствующая методика была бы изложена в возможно простой форме, не требующей от читателя большой математической подготовки. Выщенная в 1937 г. книга Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Введение в нелинейную механику», посвященная как раз этим вопросам, в настоящее время является библиографической редкостью, к тому же разработанные ее авторами методы получили теперь значительное развитие. В связи с этим настоящая книга и предлагается вниманию читателя.

Ее основной целью является изложение метода асимптотических разложений по степеням малого параметра в их современной форме применительно к задачам нелинейной механики.

Поэтому рассматриваемые в ней примеры имеют в основном иллюстративный характер, и книга никоим образом не претендует на сколько-нибудь полный охват проблем теории нелинейных колебаний и рассматриваемых в ней физических явлений.

Книга состоит из введения и пяти глав.

В главе первой рассматриваются собственные колебания в системах с одной степенью свободы, близких к линейным.

Глава вторая содержит основные элементарные сведения метода фазовой плоскости. Рассмотрены также свободные колебания в системах релаксационного типа. Для понимания вопроса о переходе к разрывной трактовке релаксационных колебаний здесь изложены основные положения метода большого параметра, разработанного А. А. Дородницыным.

Глава третья посвящена исследованию колебательных систем, находящихся под воздействием внешних периодических сил.

В главе четвертой излагаются методы усреднения, с помощью которых можно рассматривать системы со многими степенями свободы.

Эти четыре главы рассчитаны на читателя, знакомого с математикой в объеме нормального курса втуза.

Глава пятая предназначена для математиков, интересующихся вопросами теории дифференциальных уравнений с малым параметром. В ней рассмотрены вопросы обоснования асимптотических методов и установлен ряд теорем о существовании и устойчивости периодических и почти периодических решений.

## ВВЕДЕНИЕ

1. Изучение колебательных процессов имеет основное значение для самых разнообразных разделов механики, физики и техники. Вибрации сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, автоколебания в системах регулирования и следящих системах, звуковые и ультразвуковые колебания — все эти, казалось бы, различные и непохожие друг на друга колебательные процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях.

Следует заметить, что с развитием науки и техники быстро возрастает и роль учения о колебаниях. Не говоря о таких дисциплинах, как радиотехника и акустика, которые полностью «оккупированы» учением о колебаниях, возьмем, например, хотя бы машиностроение. Еще не так давно изучению колебаний здесь не придавалось особого значения, и расчеты на прочность велись на основе статических представлений о зависимости деформаций от нагрузок. Однако вместе со стремлением к увеличению числа оборотов и уменьшению габаритов при переходе к скоростному машиностроению пренебрегать ролью колебаний и здесь стало уже невозможно. Многочисленные аварии, связанные с увеличением фактических нагрузок из-за возбуждения колебаний, сделали необходимым для конструкторов и инженеров тщательное исследование возможных вибраций узлов машины и оценку их интенсивности.

Истоки современного учения о колебаниях мы можем ясно заметить в классической механике времен Галилея, Гюйгенса, Ньютона в задаче о движении маятника. В трудах Лагранжа имеется уже сформировавшаяся теория малых колебаний. При дальнейшем развитии она получила название теории линейных колебаний, т. е. колебаний, характеризуемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами как однородными, так и со свободными членами, являющимися известными функциями времени.

В трудах ряда ученых линейные дифференциальные уравнения стали мощным орудием исследования. Так, А. Н. Крылов и его ученики, развивавшие теорию линейных колебаний, с успехом применяли ее к решению проблемы о качке корабля, к теории гироскопа, к задачам артиллерии.

Простота основных принципов теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами обусловила большую разработанность теории линейных колебаний, общность формулировок ее законов и их физическую наглядность. Такие основные понятия этой теории, как собственная частота, декремент затухания, резонанс, нормальные операторы и т. д., приобрели самую широкую популярность и явились незаменимым средством исследований почти во всех разделах физики и техники. Свойство линейности дифференциальных операторов, интерпретируемое как принцип суперпозиции колебаний, факт перехода гармонических функций времени при применении этих операторов в гармонические же функции с той же частотой позволили сводить исследование влияния

произвольных приложенных сил на линейную колебательную систему к исследованию влияния сил простейшего типа, гармонически зависящих от времени. Тем самым выработался «спектральный» подход к колебательным процессам, получивший громадное значение и вне теории колебаний в собственном смысле.

Техника расчета конкретных линейных колебательных систем при стимулирующем влиянии электротехники обогатилась созданием так называемого символического метода и его различных вариантов, например метода комплексных амплитуд. Основная его идея состоит в том, что, поскольку оператор дифференцирования в комбинациях с постоянными коэффициентами подчиняется таким же законам дистрибутивности, ассоциативности, коммутативности, как и обычные числа, то можно заменить оператор дифференцирования по времени некоторым символом и формально привести систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к линейным алгебраическим уравнениям. Решая их, мы получаем «символическое решение», которое надлежит затем раскрыть, пользуясь определенной рецептурой.

В случае колебательных систем с бесконечным числом степеней свободы (или, как говорят еще, с распределенными параметрами), описываемых уравнениями в частных производных, где, кроме дифференцирования по времени, содержится также дифференцирование и по другим независимым переменным, символический метод приводит к уравнениям с меньшим числом переменных, что уже представляет весьма существенное упрощение.

После основополагающих работ Хевисайда символический метод стал с успехом применяться главным образом в электротехнике для решения многочисленных задач. Однако он долгое время вызывал сомнение со стороны математиков в отношении его законности и обоснованности. Лишь с 20-х годов настоящего столетия, после работ Карсона, Дейча, Бромвича и др., математическая сторона символического метода начала существенно проясняться, связываясь с преобразованиями Лапласа и мощными методами теории функций комплексного переменного.

Вопросам теории и приложения символьических методов в настоящее время посвящена обширная литература.

В Советском Союзе работы в области символьического метода проводились А. М. Эфросом и А. М. Данилевским, Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, А. И. Лурье и др.

Ввиду того, что теория линейных колебаний по указанным выше причинам разработана весьма детально и ее математический аппарат действует, можно сказать, почти автоматически, исследователи стремились изучаемые ими колебательные процессы по возможности подводить под линейные схемы, отбрасывая часто без должного обоснования нелинейные члены. При этом иногда совершенно упускалось из виду, что такая «линейная» трактовка может привести к существенным ошибкам не только количественного, но и принципиально качественного характера.

На первом этапе развития учения о колебаниях лишь в отдельных случаях не пользовались линеаризацией и рассматривали нелинейные колебания как таковые (Остроградский, Гельмгольц, Рэлей). Вместе с тем следует подчеркнуть, что уже в прошлом столетии существовал математический аппарат, который при надлежащем развитии и обобщении мог бы быть приложен для исследования нелинейных колебаний, во всяком случае для колебаний, достаточно близких к линейным. Достаточно близкими к линейным называются обычно колебания, для которых соответствующие

дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, но содержат некоторый параметр  $\varepsilon$ , входящий в эти уравнения так, что при нулевом значении  $\varepsilon$  они вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. При этом предполагается, что параметр  $\varepsilon$  является «малым», т. е. может принимать лишь достаточно малые по абсолютной величине значения. Говоря о таком математическом аппарате, мы имеем в виду прежде всего теорию возмущений, разработанную астрономами для изучения движения планет. Здесь также приходится иметь дело с изучением движений, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащими малый параметр. При его нулевом значении они вырождаются в уравнения, интегрируемые элементарными приемами, обычно в уравнения «задачи двух тел». Такого рода задачи, в частности знаменитая «задача трех тел», рассматривались уже при самом возникновении небесной механики, причем быстро выяснилась существенная трудность, состоявшая в невозможности использования обычных разложений по степеням малого параметра для получения результатов, пригодных для изучения движения за достаточно длительный промежуток времени.

Дело в том, что обычные разложения по степеням малого параметра приводят для искомых величин, характеризующих движение, к приближенным формулам, где наряду с членами, гармонически зависящими от времени, присутствуют еще так называемые секулярные члены типа

$$t^m \sin at, \quad t^m \cos at, \quad (1)$$

в которых время  $t$  входит вне знака синуса или косинуса. Вследствие того, что интенсивность секулярных членов быстро возрастает вместе с  $t$ , даже без детального анализа погрешности ясно, что область применимости получаемых приближенных формул ограничена слишком коротким интервалом времени.

Эту трудность можно полностью проиллюстрировать на тривиальном примере затухающего движения, описываемого уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\varepsilon x \quad (2)$$

с малым положительным параметром  $\varepsilon$ . Решение этого уравнения есть

$$x = Ce^{-\varepsilon t}. \quad (3)$$

Но если бы мы применили для решения данного уравнения обычный метод разложения по степеням  $\varepsilon$ , то получили бы

$$x = C \left( 1 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - \dots \right). \quad (4)$$

Останавливаясь здесь на одном, двух, трех членах, т. е. рассматривая формулы первого, второго и т. д. приближений, мы не сможем заметить по ним, что наша величина затухает при возрастании  $t$ , поскольку эти формулы будут применимы, лишь пока  $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$ , а за это время  $x$  не успеет заметно измениться.

Указанное свойство обычных разложений по степеням малого параметра легко также выявляется при рассмотрении метода, предложенного Пуассоном при исследовании задачи о колебаниях маятника.

Метод Пуассона сводится к следующему: пусть требуется найти решение упомянутого нелинейного уравнения, содержащего малый па-

метр  $\varepsilon$ , которое мы можем представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (5)$$

Тогда решение, удовлетворяющее уравнению с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{n+1}$ , ищут в виде ряда

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n. \quad (6)$$

Подставляя ряд (6) в левую часть уравнения (5), разлагают результат подстановки по степеням  $\varepsilon$ , причем отбрасывают члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени выше  $n$ -й. После этого приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ .

Таким образом, получают систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 &= 0, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 &= f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 &= f'_x\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)x_1 + f'_{x'}\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)x'_1, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Легко убедиться, однако, что применение изложенного метода приводит к появлению в решении вышеупомянутых секулярных членов.

Действительно, рассмотрим конкретное уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + ax + \gamma x^3 = 0, \quad a > 0, \quad \gamma > 0, \quad (8)$$

которое может быть интерпретировано как уравнение незатухающих колебаний некоторой массы  $m$ , притягиваемой к положению равновесия восстанавливающей упругой силой:

$$p(x) = ax + \gamma x^3. \quad (9)$$

Предположим, что характеристика восстанавливающей силы  $p(x)$  близка к линейной.

Тогда, обозначая  $\frac{a}{m} = \omega^2$ ,  $\frac{\gamma}{m} = \varepsilon$ , образуем приближенное решение с точностью до величин второго порядка малости.

Имеем:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1, \quad (10)$$

причем

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -x_0^3. \quad (12)$$

Из уравнения (11) находим:

$$x_0 = a \cos(\omega t + \theta), \quad (13)$$

и, подставляя в правую часть (12), получаем:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -\frac{3}{4} a^3 \cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{4} a^3 \cos 3(\omega t + \theta). \quad (14)$$

Отсюда находим для  $x_1$  следующее значение:

$$x_1 = -\frac{3}{8\omega} ta^3 \sin(\omega t + \theta) + \frac{a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta). \quad (15)$$

Подставляя (13) и (15) в (10), получаем искомое решение в виде

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega^2} \cos 3(\omega t + \theta). \quad (16)$$

В найденном приближенном решении имеется секулярный член

$$-\frac{3\varepsilon}{8\omega} a^3 t \sin(\omega t + \theta),$$

и потому колебания, представляемые формулой (16), должны раскачиваться, а амплитуда их при неограниченном возрастании  $t$  должна неограниченно возрастать, что находится в явном противоречии с характером точного решения уравнения (8), которое, как известно, выражается через эллиптические функции и имеет следующий вид:

$$x = x_{\max} \operatorname{cn} \left\{ \frac{2K}{\pi} \phi \right\}, \quad (17)$$

где  $\operatorname{cn}$ ,  $K$  обозначают соответственно эллиптический косинус и полный эллиптический интеграл первого рода.

Несоответствие решения (16) действительности подтверждается еще следующим фактом.

Если умножить уравнение (8) на  $\frac{dx}{dt}$  и проинтегрировать, то легко найдем первый интеграл — интеграл живых сил

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 + \frac{\gamma}{4} x^4 = E, \quad (18)$$

выражающий закон сохранения энергии.

Из (18) следует, что при  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$   $x^2$  не может быть больше чем  $\frac{2E}{\alpha}$ , и, следовательно, амплитуда колебаний не может неограниченно увеличиваться.

Анализируя приведенные простые примеры, мы убеждаемся в том, что изложенный способ получения приближенных решений с помощью разложения  $x$  в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  пригоден только для очень малого интервала времени.

Ряд (16) из-за присутствия секулярных членов не пригоден не только для количественного, но также и для качественного анализа поведения решения уравнения (8) на всей действительной оси, даже в случае, если ряд (16) сходится [см., например, первый пример — уравнение (2)].

Заметим еще раз, что наличие в разложении (16) секулярных членов ни в коем случае не означает, что уравнение (8) вообще не имеет периодических решений. Это свидетельствует только о несоответствующем выборе разложения.

Проиллюстрируем сказанное следующим простым примером. Рассмотрим функцию

$$\sin(\omega + \varepsilon) t, \quad (19)$$

которая имеет период  $\frac{2\pi}{\omega + \varepsilon}$ ; при малых  $\varepsilon$  и любых  $\omega$  и  $t$  мы можем ее разложить в ряд

$$\sin(\omega + \varepsilon) t = \sin \omega t + \varepsilon t \cos \omega t - \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} \sin \omega t - \frac{\varepsilon^3 t^3}{3!} \cos \omega t + \dots \quad (20)$$

Рассматривая правую часть (20), трудно установить ее периодичность ввиду наличия секулярных членов.

Совершенно такой же характер имеет и упомянутая трудность вековых членов в теории возмущений. Для ее преодоления после трудов Лагранжа и Лапласа был предложен ряд эффективных методов. Правда, степенные ряды по степеням малого параметра, к которым они приводят, являются, как правило, расходящимися, но тем не менее приближенные формулы, получаемые здесь, если ограничиться некоторым фиксированным числом членов  $m=1, 2, 3, \dots$ , оказываются весьма пригодными для практических расчетов. Дело в том, что ряды эти являются асимптотическими в том смысле, что погрешность  $m$ -го приближения пропорциональна  $(m+1)$ -й степени малого параметра  $\varepsilon$ . Поэтому для фиксированного  $m=1, 2, 3, \dots$  погрешность будет сколь угодно мала при достаточно малых значениях  $\varepsilon$ . Разумеется, увеличивая неограниченно  $m$ , мы не получим вообще сходимости при  $m \rightarrow \infty$ , но ее отсутствие несущественно для практических расчетов, поскольку на практике определение коэффициентов при последующих степенях  $\varepsilon$  столь быстро усложняется, что фактически могут быть использованы приближения лишь первого, второго, вообще очень невысокого порядка, а их применимость всецело обусловливается свойством асимптотичности.

Упомянутые асимптотические методы оказались весьма эффективными в небесной механике и были затем перенесены в квантовую механику. Следует, однако, подчеркнуть, что эти методы были разработаны специально для консервативных динамических систем, описываемых каноническими уравнениями, и не могли быть без принципиального обобщения применены для изучения большинства рассматривавшихся нелинейных колебательных систем, поскольку эти последние являются неконсервативными, содержа источниками как притока энергии, так и ее поглощения.

Кроме аппарата теории возмущений, был разработан математический аппарат, не связанный специально с консервативными системами. Здесь прежде всего следует указать на теорию линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, созданную А. М. Ляпуновым, и на локальную теорию периодических решений Ляпунова — Пуанкаре. В этой последней рассматриваются общие нелинейные дифференциальные системы, содержащие малый параметр  $\varepsilon$ , таким образом, что при  $\varepsilon=0$  они обладают периодическими решениями, и устанавливаются явные критерии существования и устойчивости периодических решений при достаточно малых значениях  $\varepsilon \neq 0$ . Методы Ляпунова и Пуанкаре имеют перед обычными методами, теории возмущений то существенное преимущество, что являются методами, строго обоснованными, пригодными не только для количественного, но также и для качественного исследования.

Хотя, как видно из сказанного, математический аппарат, который можно было бы применить для изучения нелинейных колебаний, уже существовал, он не был, однако, систематически использован в этой области примерно до начала 30-х годов настоящего столетия. Не была также раскрыта его глубокая внутренняя связь с проблемами нелинейных колебаний.

Впервые методы Ляпунова — Пуанкаре были применены к систематическому исследованию нелинейных колебаний, начиная с 1929 г., советской школой физиков, связанной с именами Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова, А. А. Витта.

Здесь следует отметить, что сами нелинейные колебания приобрели особую актуальность и стали вызывать к себе усиленный интерес лишь

с 20-х годов в связи с быстрым развитием радиотехники после появления электронной лампы. Такие проблемы, как проблема устойчивой генерации незатухающих колебаний, трансформации частоты, принудительной синхронизации, модуляции и т. д., могли быть решены лишь с помощью введения в колебательные системы нелинейных элементов, поскольку в чисто линейных колебательных системах не могут существовать установившиеся колебательные режимы, не зависящие от начальных условий; при действии внешних гармонических сил с некоторой частотой  $\omega$  возбуждаются вынужденные колебания лишь с той же частотой  $\omega$  и т. п. Электронные лампы оказались чрезвычайно гибким и удобным средством для создания соответствующих нелинейных элементов.

Только после появления многочисленных исследований, связанных с проблемами упомянутого типа, стало физически ясным то глубокое, принципиальное отличие механики нелинейных колебаний от механики линейных колебаний, которое полностью сохраняется даже при рассмотрении слабо нелинейных колебаний, описываемых дифференциальными уравнениями, отличающимися от линейных с постоянными коэффициентами лишь наличием весьма малых членов.

Представим себе, что система настолько близка к линейной, что колебания в течение одного периода имеют форму, весьма близкую к гармонической. Однако если рассматривать эти колебания на большом интервале времени по сравнению с периодом колебания, то уже существенно будет проявляться влияние даже малых отклонений системы от линейной, выражающееся в наличии малых нелинейных членов в дифференциальных уравнениях.

Так, например, в системе могут присутствовать источники и поглотители энергии, которые производят и поглощают весьма малую работу за один период колебаний, но при длительном их действии эффект, производимый ими, может накапливаться и оказывать существенное влияние на протекание колебательного процесса, на его затухание, раскачивание и устойчивость. Аналогично нелинейность квазиупругой силы будет при длительном воздействии оказывать влияние на fazu колебаний и т. п.

Таким образом, малые нелинейные члены могут оказывать как бы коммулятивное действие.

Подчеркнем еще, что из-за нелинейности нарушается принцип суперпозиции, и отдельные гармоники колебаний вступают во взаимодействие между собой, вследствие чего делается невозможным индивидуальное рассмотрение поведения каждого гармонического слагающего колебаний в отдельности.

Совершенно естественно, что наиболее доступными для исследования являются колебательные системы с малой нелинейностью, поскольку к ним в той или иной форме можно применять методы теории возмущений.

Исследование же системы с большой нелинейностью является с математической точки зрения весьма трудной проблемой, требующей индивидуального подхода в каждом конкретном случае.

Более или менее исследованными, и то лишь с качественной стороны, являются колебательные системы с одной степенью свободы, находящиеся под воздействием сил, не зависящих от времени.

Для систем же, слабо нелинейных, описываемых упоминавшимися ранее дифференциальными уравнениями с малым параметром при нелинейных членах, имеется теперь уже ряд достаточно общих методов, применимых ко многим типичным классам колебательных систем, часто встречающимся на практике.

Одним из первых таких методов явился метод Ван-дер-Поля. В своих исследованиях Ван-дер-Поль рассматривал главным образом уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (21)$$

с малым положительным параметром  $\varepsilon$ . При этом обычно полагалось (уравнение Ван-дер-Поля):

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (1 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (22)$$

При известной схематизации это уравнение, во всяком случае с качественной стороны, правильно описывает процессы самовозбуждающихся колебаний в электронных генераторах.

Для получения первого приближения Ван-дер-Поль предложил особый метод «медленно меняющихся» коэффициентов, аналогичный одному из методов, применявшихся еще Лагранжем в небесной механике, а именно: он представил истинное решение в виде функции, выражающей гармонические колебания

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

с медленно меняющимися амплитудой  $a$  и фазой  $\varphi$ . Эти последние величины должны находиться из дифференциальных уравнений с разделенными переменными

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(a), \quad (24)$$

где  $A(a)$ ,  $B(a)$  — некоторые функции амплитуды, просто определяемые через заданное выражение  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ . С помощью своего метода Ван-дер-Поль получил ряд важных результатов. Так, например, им были исследованы процесс установления колебаний, стационарные режимы, колебательный гистерезис и т. д.

Следует, однако, подчеркнуть, что в данной Ван-дер-Полем формулировке приближение выводилось с помощью чисто интуитивных рассуждений, и, хотя приближение это оказалось плодотворным в первый период работ в области нелинейной механики, оно не могло полностью удовлетворить запросам практики. Кроме того, оставались неясными вопросы его теоретического обоснования, пределов применимости и получения высших приближений.

Основной целью настоящей книги является изложение асимптотических методов нелинейной механики, разработанных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Для исследования систем с медленно меняющимися параметрами изложен метод Ю. А. Митропольского. Главное внимание уделено слабо нелинейным системам с одной степенью свободы.

В конце книги некоторые из этих методов распространяются на более общие случаи.

Как мы уже говорили, системы изучаемого нами вида весьма часто встречаются на практике.

Рассмотрим поэтому ряд типичных примеров таких систем. В дальнейшем этими примерами мы будем пользоваться для иллюстрации излагаемых нами методов.

2. Наиболее простым примером нелинейной колебательной системы является обычный математический маятник (рис. 1). Если пренебречь трением, то уравнение, описывающее колебания маятника, имеет вид

$$ml^2 \frac{d^2x}{dt^2} + mgl \sin x = 0, \quad (25)$$

где  $m$  — масса маятника,  $l$  — длина,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $x$  — угол отклонения от вертикального положения.

Для малых углов отклонения  $\sin x$  с достаточной степенью точности можно заменить через  $x$ . В этом случае уравнение (25) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0. \quad (26)$$

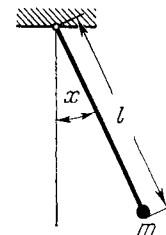


Рис. 1.

Уравнение (26) является уравнением гармонических колебаний, причем последние будут изохронными, т. е. период их  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  не будет зависеть от начальной скорости и отклонения.

Однако для больших отклонений маятника уравнение (26) является неточным. В случае, если отклонения не превышают углов порядка одного радиана, то  $\sin x$  в уравнении (25) с достаточной степенью точности может быть заменен первыми двумя членами разложения в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (27)$$

Тогда уравнение (25) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( x - \frac{x^3}{6} \right) = 0. \quad (28)$$



Очевидно, как это будет подробно показано ниже, колебания в этом случае уже не будут являться изохронными, и частота их будет зависеть от амплитуды колебания:

Рис. 2.

$$\omega = \omega(a).$$

Рассмотрим также колебания некоторого груза массы  $m$ , подвешенного на пружине (рис. 2). Пусть  $f(x)$  — сила, которую создает пружина, растянутая на длину  $x$  по отношению к состоянию покоя. В этом случае жесткость пружины для смещения  $x$  может быть определена как  $f'(x)$ . Пренебрегая опять-таки силой трения, имеем уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \quad (29)$$

Если жесткость пружины возрастает с увеличением смещения, то, как принято говорить, пружина имеет жесткую характеристику нелинейной восстанавливающей силы (рис. 3). Если жесткость уменьшается с увеличением смещения, то пружина имеет мягкую характеристику (рис. 4). Очевидно, что колебания груза на пружине, описываемые уравнением (29), тоже не изохронны ввиду того, что период колебания будет уменьшаться при увеличении жесткости, а эффективная жесткость

в данном случае растет с амплитудой. Аналогично в случае мягкой характеристики период будет увеличиваться.

Например, в уравнении (28) восстанавливающая сила  $f(x) = -mgl\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$  обладает мягкой характеристикой и, следовательно, период колебаний будет возрастать с увеличением амплитуды.

Приведем теперь пример нелинейной электрической колебательной системы.

Для этого рассмотрим колебательный контур, состоящий из самоиндукции  $L$ , железного сердечника и емкости  $C$  (рис. 5). Пусть

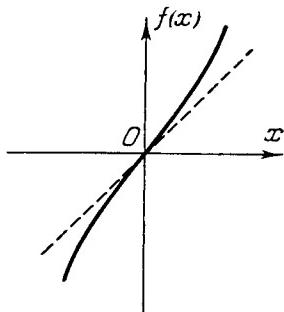


Рис. 3.

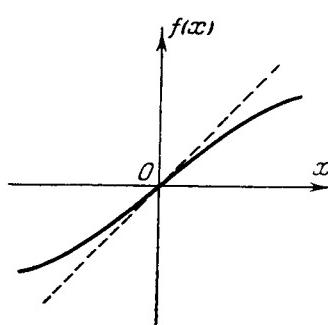


Рис. 4.

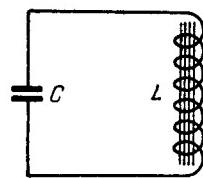


Рис. 5.

$\Phi$  — магнитный поток, проходящий сквозь катушку. Тогда уравнение для рассматриваемого контура можно написать в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0, \quad (30)$$

где  $i$  — сила тока. Для определения зависимости между силой тока и индуцируемым потоком в катушке при наличии железного сердечника воспользуемся следующей общепринятой формулой:

$$i = a\Phi - b\Phi^3, \quad (31)$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Тогда, подставляя (31) в (30), получим следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{C}(a\Phi - b\Phi^3) = 0, \quad (32)$$

для которого восстанавливающая сила также имеет мягкую характеристику.

В рассмотренных выше колебательных системах не принимались во внимание силы трения, вызывающие затухание собственных колебаний.

Как известно, законы механического трения, вообще говоря, весьма слабо исследованы.

На практике обычно пользуются следующими законами трения:

1) Сила трения пропорциональна скорости (при колебаниях в воздухе с небольшими скоростями).

2) Сила трения пропорциональна квадрату скорости (при колебаниях в жидкой среде или в воздухе, но при больших скоростях).

3) Сила трения постоянна по величине, не зависит от скорости и действует в направлении, противоположном скорости, — кулоновское трение.

4) Внутреннее трение, зависящее от потерь в материале при колебаниях (в пружине, в нити маятника и т. д.). В этом случае сила трения обычно выражается в виде более сложных зависимостей от смещения или скорости.

Так, например, рассматривая маятник, свободно качающийся в воздухе, и предполагая, что сила трения пропорциональна скорости, получим уравнение колебаний в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (33)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, обычно называемый коэффициентом затухания.

Если тело, подвешенное на пружине с восстанавливающей силой  $f(x)$ , погрузить в жидкость, то, предполагая, что сила трения пропорциональна квадрату скорости, получим следующее уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm a \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + f(x) = 0; \quad (34)$$

здесь  $a$  — коэффициент затухания, и, кроме того, знак «+» следует брать при  $\frac{dx}{dt} > 0$ , а знак «—» — при  $\frac{dx}{dt} < 0$ , так как сила трения всегда направлена противоположно скорости тела.

Предположим еще, что на это же тело, подвешенное на пружине, действует не квадратичное, а кулоновское трение.

Тогда уравнение движения будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + A \operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) + f(x) = 0, \quad (35)$$

где  $A$  — абсолютная величина силы трения и

$$\operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{dx}{dt} > 0, \\ -1, & \text{если } \frac{dx}{dt} < 0. \end{cases} \quad (36)$$

В качестве примера, иллюстрирующего учет сил внутреннего трения, рассмотрим вертикальные колебания некоторой массы  $m$ , подвешенной к стержню длины  $l$  сечением  $F$  и с модулем упругости  $E^*$ ) (рис. 6).

Предположим, что масса  $m$  может совершать только вертикальные колебания, а масса стержня, играющего в нашем случае роль пружины, незначительна по сравнению с подвешенной массой  $m$ . Тогда систему можно рассматривать как систему с одной степенью свободы. При составлении дифференциального уравнения движения колеблющейся массы  $m$  будем учитывать потери энергии колебания на внутреннее рассеяние в материале стержня, массой же самого стержня будем пренебрегать.

Обозначая через  $x$  относительное удлинение стержня, получаем уравнение в виде

$$ml \frac{d^2x}{dt^2} + EF \cdot \overleftrightarrow{EF\Phi}(x) = 0, \quad (37)$$

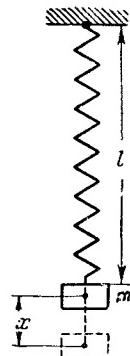


Рис. 6.

\*) Этот пример подробно рассмотрен в работе Г. С. Писаренко [36]. В его исследовании разработан общий метод, г

и с бесконечным числом степеней свободы.

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 [x + \overset{\leftarrow}{\Phi}(x)] = 0, \quad (38)$$

где  $\omega^2 = \frac{EF}{ml}$  — собственная частота линейной системы,  $\omega^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}(x)$  — функция, учитывающая затухание в материале стержня, причем значение ее при восходящем и нисходящем движении различно; в уравнении это отмечено соответственно двумя различно направленными стрелками.

Таким образом, процесс колебания рассматриваемой системы, в которой происходит потеря энергии на рассеяние в материале стержня, фактически выражается двумя дифференциальными уравнениями.

Будем предполагать, что отклонение зависимости между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $x$  в материале стержня мало отличается от линейного закона Гука. В этом случае уравнение (38) будет близким к линейному.

Приведем также явное выражение для функции  $\omega^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}(x)$ . Допустим, что при вертикальных колебаниях массы  $m$ , подвешенной на упругом стержне, петля гистерезиса, построенная в координатах:  $x$  — относительное удлинение,  $\sigma$  — нормальное напряжение, будет симметрична (рис. 7).

В этом случае истинный модуль упругости будет переменным, и согласно гипотезе Н. Н. Давиденкова выражение для функции  $\omega^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}(x)$  имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \overset{\rightarrow}{\Phi}(x) &= -\frac{\nu \omega^2}{n} [(a+x)^n - 2^{n-1} a^n], \\ \omega^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}(x) &= \frac{\nu \omega^2}{n} [(a-x)^n - 2^{n-1} a^n], \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где  $\nu$  и  $n$  — постоянные, определяемые экспериментально, а  $a$  — амплитуда колебаний.

В рассмотренных выше колебательных системах в некоторых случаях не учитывались диссипативные силы (силы трения), однако в действительности диссипативные силы всегда в той или иной мере воздействуют на колебательную систему, в результате чего колебания со временем затухают.

Незатухающие колебания практически могут существовать в случае, если в системе имеется некоторый источник энергии, который может компенсировать расход энергии, возникший в результате наличия диссипативных сил.

Таким источником энергии может являться периодическая сила, действующая на колебательную систему. Так, например, если на обычный линейный вибратор действует внешняя периодическая сила, имеющая одну гармонику, то мы получаем следующее уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = E \sin \nu t, \quad (40)$$

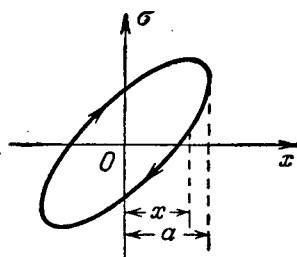


Рис. 7.

согласно которому в колебательной системе будут существовать незатухающие колебания. В данном случае потери на трение, вызываемые наличием диссипативного члена  $\lambda \frac{dx}{dt}$ , будут компенсироваться за счет энергии, поступающей извне и характеризующейся периодическим членом  $E \sin \vartheta$ .

Однако источник энергии сам по себе может и не иметь никакой определенной периодичности, но его воздействие на колебательную систему играет роль как бы отрицательного трения, которое компенсирует обычное положительное трение, вносимое диссипативными силами.

Колебания такого типа, существенно отличающиеся от рассмотренного выше случая наличия периодического источника энергии, называются автоколебаниями.

В автоколебательных системах при известных условиях положение равновесия теряет устойчивость и возникает движение, переводящее систему в режим стационарного периодического колебания (т. е. колебания, совершающегося с постоянной амплитудой и фазой).

Для осуществления стационарного периодического режима необходимо, чтобы система состояла из трех частей: из колебательной системы; из некоторого источника энергии, управляемого колебательной системой, воздействие которого на систему компенсирует потери на трение, делает положение равновесия неустойчивым, а колебания нарастающими, и из некоторого ограничителя, переводящего эти нарастающие колебания в стационарное состояние.

Первые две части системы могут быть линейными, ограничитель же колебаний всегда является нелинейным, и поэтому любая автоколебательная система описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

Автоколебательные системы широко распространены и имеют большое значение в физике и технике.

Для того чтобы наглядно составить себе представление о характере возбуждения колебаний в автоколебательной системе, рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы.

Если колебания имеют малую амплитуду, то приходим к исследованию линейного дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (41)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, будет:

$$x = ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (42)$$

где  $a$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования,

$$\delta = \frac{\lambda}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \left( \frac{\lambda}{2m} \right)^2. \quad (43)$$

Поэтому, если  $\lambda > 0$ , то, очевидно, амплитуда малых колебаний  $ae^{-\delta t}$  будет затухать по экспоненциальному закону.

Если же, наоборот,  $\lambda < 0$ , то малые колебания будут раскачиваться и их амплитуда будет возрастать по экспоненциальному закону.

Ввиду того, что амплитуда колебаний не может бесконечно увеличиваться, естественно предположить, что, начиная с некоторого момента, коэффициент затухания меняет знак и становится положительным.

Это свойство колебательной системы можно отразить в дифференциальном уравнении колебаний, заменив постоянный коэффициент  $\lambda$

на переменный коэффициент, например, следующего вида:

$$\lambda = -A + B \left( \frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (44)$$

где  $A > 0$ ,  $B > 0$ .

В результате получаем уравнение вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \left\{ -A + B \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (45)$$

из которого следует, что затухание отрицательно для малых по абсолютной величине значений  $\frac{dx}{dt}$  и положительно для больших. Таким образом, колебания малой амплитуды будут раскачиваться, а большой — затухать.

Итак, мы видим, что существуют незатухающие автоколебания, к которым стремятся как колебания с малой амплитудой, так и колебания с большой амплитудой.

Уравнение (45) называется уравнением Рэлея и имеет большое значение в теории автоколебаний.

Уравнение (45) с помощью замены переменных

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ y &= \sqrt{\frac{3Bk}{Am}} \int x d\tau \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

может быть приведено к следующему:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad (47)$$

где  $\frac{A}{\sqrt{km}} = \varepsilon$ .

Уравнение автоколебаний, представленное в таком виде, называется уравнением Ван-дер-Поля.

Приведем теперь конкретные примеры автоколебательных систем.

Рассмотрим электронный генератор, схематически изображенный на рис. 8.

Пусть  $i_L$ ,  $i_C$ ,  $i_R$  — соответственно токи в самоиндукции  $L$ , емкости  $C$  и сопротивлении  $R$  колебательного контура.

Обозначим через  $E_a$  постоянное напряжение в анодной цепи,  $V_a$  — полное напряжение на аноде электронной

лампы,  $V_g$  — напряжение на сетке,  $i_a$  — анодный ток,  $M$  — коэффициент взаимной индукции между цепью сетки и колебательным контуром.

Согласно схеме рис. 8, пренебрегая сеточным током, имеем:

$$L \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{C} \int i_C dt = R i_R = E_a - V_a, \quad (48)$$

$$M \frac{di_L}{dt} = V_g, \quad (49)$$

$$i_a = i_L + i_R + i_C, \quad (50)$$

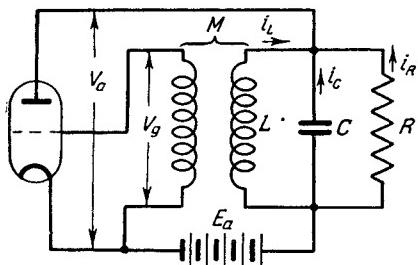


Рис. 8.

и, следовательно, можем написать дифференциальное уравнение:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = i_a. \quad (51)$$

Как известно, анодный ток  $i_a$  является определенной функцией управляющего напряжения  $u = V_g + DV_a$ , т. е.

$$i_a = f(u) = f(V_g + DV_a), \quad (52)$$

где  $D$  — константа, называемая проницаемостью лампы. Обычно численная величина  $D$  мала по сравнению с единицей.

Подставляя (52) в (51) и принимая во внимание (48) и (49), получим:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = f \left[ DE_a + (M - DL) \frac{di_L}{dt} \right]. \quad (53)$$

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$\begin{aligned} E_0 &= DE_a, \\ V &= (M - LD) \frac{di_L}{dt}. \end{aligned}$$

Очевидно,  $V$  — переменная слагающая управляющего напряжения  $u$ , возбуждаемая вибрациями тока в колебательном контуре, а  $E_0$  — постоянная слагающая, возбуждаемая источником постоянного тока.

Тогда для неизвестной  $V$  из (53) получаем уравнение следующего вида:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + V + \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (54)$$

Произведя замену переменных по формуле

$$t = \tau \sqrt{LC},$$

получаем следующее уравнение для электронного генератора в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + V + \frac{1}{VLC} \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (55)$$

При некоторых допущениях уравнение (55) может быть сведено к уравнению Ван-дер-Поля.

Действительно, предположим, что постоянная слагающая управляющего напряжения  $E_0$  выбрана таким образом, что она является абсциссой точки перегиба характеристики лампы:

$$i_a = f(u),$$

т. е. так, что

$$f''(E_0) = 0$$

(рис. 9).

Тогда для некоторого интервала значений  $V$  можем приближенно положить:

$$f(E_0 + V) = f(E_0) + Vf'(E_0) + \frac{V^3}{6} f'''(E_0). \quad (56)$$

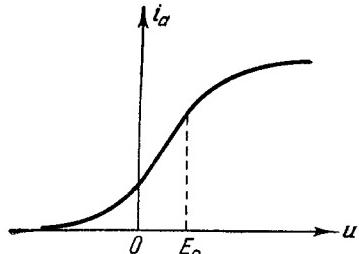


Рис. 9.

Допустим, что

$$(M - LD) f''(E_0) < 0,$$

$$(M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R} > 0.$$

Тогда уравнение (55) преобразуется к уравнению Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (57)$$

где введены обозначения:

$$\frac{(M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R}}{\sqrt{LC}} = \varepsilon, \quad \alpha V = x,$$

$$\alpha^2 = \frac{-(M - LD) f''(E_0)}{2 \left\{ (M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R} \right\}}.$$

Приведем еще один пример автоколебательной системы, встречающейся в электротехнике.

Рассмотрим электрический колебательный контур (рис. 10), состоящий из емкости  $C$ , самоиндукции  $L$  и некоторого элемента с нелинейной характеристикой напряжение — ток:  $e = F(i)$  (рис. 11).

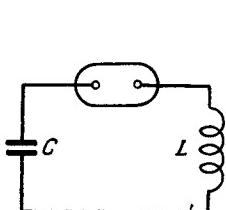


Рис. 10.

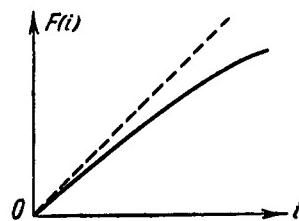


Рис. 11.

Тогда колебания в контуре будут описываться уравнением

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + i + CF'(i) \frac{di}{dt} = 0 \quad (58)$$

или, если положить, что характеристика аппроксимируется полиномом пятой степени

$$F(i) = A + Bi + Di^2 + Ei^3 + Fi^4 + Gi^5, \quad (59)$$

следующим уравнением:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + i + C(B + 2Di + 3Ei^2 + 4Fi^3 + 5Gi^4) \frac{di}{dt} = 0, \quad (60)$$

для которого в зависимости от характера полинома (59) может существовать решение, соответствующее стационарному колебательному режиму.

В качестве механической автоколебательной системы рассмотрим маятник Фроуда.

Устройство этого маятника схематически представлено на рис. 12: на вал  $O$ , вращающийся с равномерной скоростью, надета муфта  $M$ , жестко связанная с маятником; трение муфты при вращении на валу

известно. Обозначим через  $\theta$  угол отклонения оси маятника от вертикали (рис. 13),  $u$  — угловую скорость вращения вала,  $J$  — момент инерции маятника,  $\lambda \frac{d\theta}{dt}$  — момент сил трения маятника о воздух, пропорциональный угловой скорости колебаний маятника  $\frac{d\theta}{dt}$ .

Кроме сил трения маятника о воздух, при составлении уравнения необходимо учесть также момент сил трения между муфтой и валом.

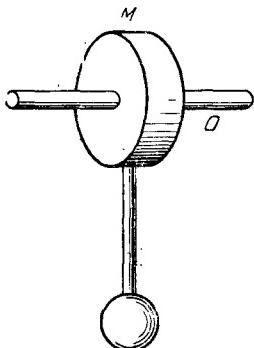


Рис. 12.

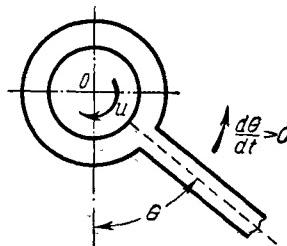


Рис. 13.

Допустим для упрощения, что этот момент  $M$  является определенной функцией  $F$  от относительной угловой скорости  $v$  (маятника относительно вала)

$$M = F(v). \quad (61)$$

В рассматриваемом случае, очевидно, имеем:

$$v = u + \frac{d\theta}{dt},$$

и поэтому уравнение колебаний маятника Фроуда (идеализированного) может быть представлено в виде

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) + m g a \sin \theta = 0, \quad (62)$$

где  $m$  — масса маятника,  $a$  — расстояние от центра тяжести маятника до центра оси вала,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Характеристика трения между муфтой и валом (61) имеет, вообще говоря, падающие участки (рис. 14), на которых

$$F'(v) < 0.$$

Выберем скорость  $u$  так, чтобы  $u$  была абсциссой точки перегиба падающего участка:

$$F''(u) = 0,$$

причем допустим, что

$$F'(u) + \lambda < 0,$$

$$F''(u) > 0.$$

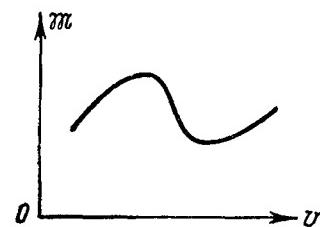


Рис. 14.

Для  $\frac{d\theta}{dt}$ , лежащего в известных пределах, можно положить:

$$F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) = F(u) + F'(u)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6}F'''(u)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3. \quad (63)$$

Тогда, рассматривая случай малых колебаний и полагая  $\sin \theta \approx \theta$ , приводим уравнение (62) к уравнению Рэлея или уравнению Ван-дер-Поля.

Приведем еще один пример механической автоколебательной системы.

Допустим, что некоторое тело массы  $m$  находится на шероховатой поверхности ремня, натянутого между двумя шкивами и двигающегося

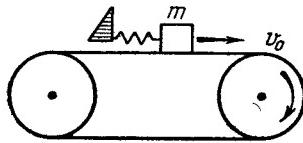


Рис. 15.

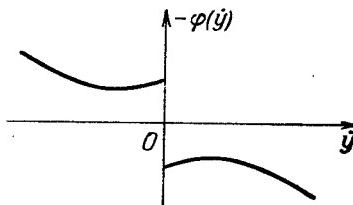


Рис. 16.

с постоянной скоростью  $v_0$  (рис. 15). Тело прикреплено к неподвижной точке при помощи пружины, упругость которой изменяется по линейному закону.

Как известно, для определенных значений  $v_0$  тело не будет находиться в состоянии покоя, а будет совершать прерывистые колебания. Это является следствием того, что сила сухого трения между телом и ремнем — не постоянная величина, а изменяется в зависимости от скорости скольжения  $\frac{dy}{dt}$  тела относительно ремня (рис. 16). Пока тело находится в покое относительно ремня ( $\frac{dy}{dt} = 0$ ), сила трения  $\varphi\left(\frac{dy}{dt}\right)$  возрастает, оставаясь в каждый момент равной силе натяжения пружины; когда эта сила достигает некоторого значения, равного критической величине силы трения, начинается движение тела относительно ремня, причем сначала сила трения будет уменьшаться при возрастании  $\left|\frac{dy}{dt}\right|$ , а затем при достаточно большом  $\left|\frac{dy}{dt}\right|$  — увеличиваться.

Выберем начало координат в точке, в которой пружина находится в недеформированном состоянии. Тогда скорость скольжения тела можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - v_0,$$

и уравнение движения тела будет иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt} - v_0\right) + kx = 0. \quad (64)$$

Если за начало отсчета принять положение тела, в котором оно находится в равновесии при одновременном действии упругой силы

и силы трения, т. е. положение, для которого

$$\varphi(-v_0) + kx = 0, \quad (65)$$

то для новой координаты  $z$ :

$$z = x + \frac{1}{k} \varphi(-v_0),$$

уравнение движения будет иметь вид

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + F\left(\frac{dz}{dt}\right) + kz = 0, \quad (66)$$

где

$$F\left(\frac{dz}{dt}\right) m \frac{d^2z}{dt^2} + F\left(\frac{dz}{dt}\right) - \varphi(-v_0).$$

Рассмотренные выше колебательные системы достаточно близки к линейным.

В полученных дифференциальных уравнениях нелинейные члены, являясь малыми, могут рассматриваться как слабое возмущение, пропорциональное некоторому малому параметру.

Поэтому в общем случае для таких колебательных систем дифференциальное уравнение удобно записывать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (67)$$

где правая часть содержит малые нелинейные члены ( $\epsilon \ll 1$ ), характеризующие нелинейное трение, нелинейные добавки к восстанавливающей упругой силе, нелинейные члены, обусловливающие существование автоколебательного режима, и т. д.

Введение малого параметра  $\epsilon$  является очень удобным средством математического представления того обстоятельства, что в течение времени порядка  $\frac{2\pi}{\omega}$  (периода колебания) форма колебаний близка к синусоидальной.

Если говорить об общих свойствах таких нелинейных колебаний, то следует подчеркнуть, что в отличие от линейных колебаний их частоты и амплитуды могут быть переменными. Если даже пренебречь высшими гармониками и приближенно положить

$$x = a \cos \theta, \quad (68)$$

то при этом надо учесть, что  $a$  и  $\theta$ , вообще говоря, переменны.

В нелинейных системах амплитуда колебания может изменяться в зависимости от поступления или убыли энергии в системе. В слабо нелинейных системах это изменение, естественно, очень мало, так что практически оно сказывается лишь за время  $T$ , намного большее времени одного цикла колебания.

Рассматривая выражение мгновенной мощности, создаваемой силами, представленными в уравнении малыми возмущающими нелинейными членами, мы видим, что это выражение, являясь периодической функцией фазового угла  $\theta$ , зависит также от амплитуды  $a$ .

Поскольку фазовый угол вращается с частотой  $\omega$ , а амплитуда меняется достаточно медленно, то при усреднении за промежуток времени, в течение которого амплитуда еще не успеет заметно отклониться от начального значения, а фаза уже успеет сделать достаточно большое число

оборотов, члены, содержащие  $\cos n\theta$  и  $\sin n\theta$ , сделаются весьма малыми, так как выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos n\theta dt &= \frac{1}{n\omega T} \sin n\theta \Big|_0^T, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \sin n\theta dt &= -\frac{1}{n\omega T} \cos n\theta \Big|_0^T \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

содержат  $T$  в знаменателе.

Таким образом, мощность, развиваемая указанными силами за промежуток времени  $T$ , будет в результате зависеть лишь от амплитуды колебания.

Поэтому естественно рассматривать приближенное уравнение, определяющее ход изменения амплитуды, в следующем виде:

$$\frac{da}{dt} = F(a). \quad (70)$$

В дальнейшем мы убедимся, что последовательное применение асимптотического метода действительно приводит к уравнению именно такого типа.

Функцию  $F(a)$  целесообразно представить в виде  $-\delta(a)a$ , вводя эффективный декремент  $\delta(a)$ , подчеркивающий здесь аналогию с линейными системами, в которых  $\delta$  является постоянной.

Таким образом, естественно положить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(a), \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где  $\omega(a)$  — «эффективная частота колебаний», а  $\delta(a)$  — «эффективное затухание», определяемое наличием в системе источников или поглотителей энергии.

В системах с трением при любых значениях  $a$

$$\delta(a) > 0,$$

в автоколебательных же системах для некоторых значений амплитуды колебания

$$\delta(a) = 0.$$

Остановимся еще на одном типе колебательных систем, имеющих очень широкое распространение в природе, однако существенно отличающихся от приведенных выше автоколебательных систем с малой нелинейностью тем, что в них параметр  $\varepsilon$  — большой параметр, и, в частности, рассмотрим случай  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Колебания, описываемые уравнениями такого вида, получили название релаксационных. Это название отражает наличие двух различных и характерных стадий, на которые распадается колебательный процесс в релаксационной колебательной системе, а именно: медленное накопление энергии системой и последующая разрядка энергии, происходящая почти мгновенно после того, как достигнут некоторый критический потенциальный порог для указанного накопления энергии.

Колебательные системы релаксационного типа (затухающие величины), так же как и рассмотренные выше системы, близкие к линейным, могут быть охвачены достаточно общими методами исследования.

В качестве примера рассмотрим релаксационные колебания, происходящие при известных условиях в цепи с неоновой лампой, составленной согласно схеме рис. 17. В этой схеме неоновая лампа  $N$  замкнута на источник постоянного напряжения  $E_a$  через сопротивление  $R$  и запущнтирована емкостью  $C$ . При рассмотрении этой схемы будем пренебрегать силами инерции в колебательной системе, что приведет нас в итоге к дифференциальным уравнениям не второго порядка, а первого.

Нелинейность колебательной системы, приведенной на схеме рис. 17, обусловливается неоновой лампой, для которой зависимость между напряжением  $v$  и током  $i$  не подчиняется линейному закону Ома.

При идеализации процесс изменения тока  $i$  в зависимости от изменения напряжения  $v$  протекает следующим образом: при изменении  $v$  от нулевого значения в сторону увеличения вначале лампа не горит и ток в ней отсутствует. По достижении определенного

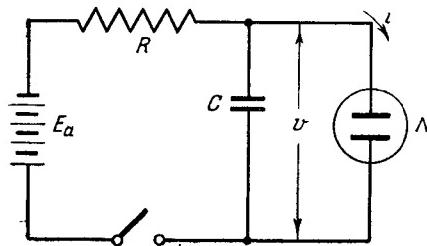


Рис. 17.

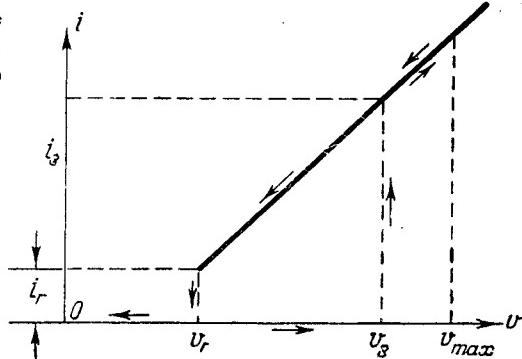


Рис. 18.

напряжения  $v_3$ , называемого напряжением зажигания, лампа загорается, ее сопротивление резко падает, и ток скачком получает значение  $i_3$ ; дальнейшее увеличение  $v$  вызывает линейное нарастание тока. Если теперь, после того как напряжение достигло некоторого значения  $v_{max} > v_3$ , начать производить непрерывное уменьшение его, ток  $i$  будет уменьшаться по линейному закону, пока  $v$  не дойдет до так называемого напряжения гашения  $v_r$ . В этот момент лампа гаснет и ток  $i$  срывается, становясь равным нулю. В принятой идеализации рассмотренная зависимость графически представлена характеристикой рис. 18, состоящей из прямолинейных участков и обладающей гистерезисной петлей.

Поэтому можно положить  $i = 0$  для погашенной лампы и  $i = i_r + \frac{v - v_r}{R_N}$  для горящей лампы.

Для составления дифференциального уравнения заметим, что, поскольку ток через конденсатор равен  $C \frac{dv}{dt}$ , ток в сопротивлении  $R$  будет  $C \frac{dv}{dt} + i$  и, следовательно, падение напряжения на  $R$  представится равенством

$$R \left( C \frac{dv}{dt} + i \right) = E_a - v,$$

откуда находим:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v - Ri}{CR}. \quad (72)$$

При замыкании ключа в схеме рис. 17 начинается процесс заряда конденсатора.

Так как в начальный момент напряжение на зажимах лампы равно нулю, то в течение некоторого периода времени оно будет меньше  $v_b$ . В течение этого времени неоновая лампа не зажигается и, следовательно, согласно (72) имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v}{RC}. \quad (73)$$

Если  $E_a > v_b$ , то согласно уравнению (73) спустя некоторое время  $v$  достигает значения  $v_b$ , лампа загорается, после чего начинается при достаточно большом значении  $R$  процесс разряда конденсатора через неоновую лампу. Для этого процесса мы имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E_a - v - R \left[ i_r + \frac{v - v_r}{R_N} \right]}{RC}. \quad (74)$$

Пусть  $R$  столь велико, что

$$E_a - v - Ri_r < 0.$$

Тогда  $v$  согласно (74) монотонно убывает до значения  $v = v_r$ , после чего лампа гаснет и начинается опять процесс заряда конденсатора, затем снова процесс разряда через лампу и т. д.

Таким образом, в нашей схеме совершаются периодические релаксационные колебания, при которых  $v$  изменяется между  $v_r$  и  $v_b$ .

Уравнение колебаний, очевидно, может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = \Phi(v), \quad (75)$$

где  $\Phi(v)$  на интервале  $v_r < v < v_b$  согласно (73) и (74) имеет два значения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(v) &= \frac{E_a - v}{RC} \text{ (для } v \text{ возрастающих),} \\ \Phi(v) &= \frac{E_a - v - Ri_r - \frac{R}{R_N}(v - v_r)}{RC} \text{ (для } v \text{ убывающих).} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

3. В приведенных выше примерах колебательных систем возмущающие силы не зависели явно от времени. Эти колебательные системы были изолированы от внешних влияний, вследствие чего все действующие на систему силы зависели только от динамического состояния самой системы.

Приведем теперь типичные примеры нелинейных колебательных систем, находящихся под воздействием внешних периодических сил, и проанализируем с физической точки зрения характерные явления, могущие возникнуть в нелинейных системах в этом случае.

Начнем с рассмотрения самого простого примера — нелинейного вибратора, на который действует слабая гармоническая возбуждающая сила  $eE \cos \omega t$ .

Уравнение движения в этом случае запишется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \cos \nu t. \quad (77)$$

Ввиду малости внешней силы и малости нелинейного члена колебания за один цикл будут иметь форму, близкую к гармонической:

$$\left. \begin{aligned} x &\approx a \cos(\omega t + \phi), \\ \frac{dx}{dt} &\approx -a\omega \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Амплитуды и фазы будут здесь претерпевать существенные изменения лишь за время, включающее большое количество циклов.

Рассмотрим среднюю мощность

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varepsilon E \cos \nu t \frac{dx}{dt} dt, \quad (79)$$

вносимую в систему внешней силой за время  $T$ , в течение которого она еще не успевает заметно изменить форму колебания. Так как внешняя сила считается малой, это время  $T$ , в течение которого колебание приближенно является «собственным», может быть взято достаточно большим по сравнению с циклом колебания.

Подставляя (78) в выражение (79), получим среднюю мощность в виде

$$A = \frac{a\omega\varepsilon E}{2T} \left[ \frac{\cos[(\nu + \omega)t + \phi]}{\nu + \omega} - \frac{\cos[(\nu - \omega)t - \phi]}{\nu - \omega} \right]_{t_0}^{t_0+T}. \quad (80)$$

Для достаточно больших  $T$  это выражение практически отлично от нуля только тогда, когда внешняя частота достаточно близка к собственной.

Таким образом, малая возмущающая сила, действующая в течение продолжительного времени, может оказывать заметное влияние на рассматриваемый вибратор лишь в случае резонанса  $\nu \approx \omega$ . Такой резонанс условимся называть «главным» или обыкновенным резонансом.

В нашем рассуждении мы исходили из чисто гармонической формы собственных колебаний.

Однако из-за наличия яелинейного члена в собственном колебании непременно будут появляться (и при отсутствии внешней возбуждающей силы) высшие гармоники.

Подставляя в (79) вместо  $x$  выражение собственного колебания, содержащее высшие гармоники с частотами  $n\omega$ , и повторяя вышеизведенное рассуждение, убеждаемся в том, что рассматриваемая средняя мощность при достаточно большом  $T$  может быть практически отлична от нуля не только при  $\omega \approx \nu$ , но и при  $n\omega \approx \nu$ , где  $n=2, 3$  и т. д. Эти дополнительные резонансы, которые можно заметить лишь в следующем приближении, при учете наличия обертонов в собственных колебаниях, будем называть резонансом деления частоты или демультиликационным резонансом.

В еще более высоких приближениях можно заметить и более сложные резонансы дробного типа

$$n\omega \approx m\nu,$$

обусловленные тем, что при достаточно высоком приближении в выраже-

ний  $\frac{dx}{dt}$  следует учитывать не только обертоны собственной частоты, но и комбинационные тоны с частотами типа  $\omega \pm \nu$ .

В рассматривавшемся случае слабо нелинейного вибратора с приложенной малой гармонической силой в первом приближении мы обнаружили лишь главный резонанс  $\omega \approx \nu$ . Однако в некоторых слабо нелинейных системах уже в первом приближении проявляются и резонансы другого типа, например резонансы деления на два.

Так, например, если рассматривать колебательную систему, жесткость которой изменяется периодически, то получаем известное уравнение Маттье:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(1 + h \cos \nu t)x = 0. \quad (81)$$

Предполагая, что коэффициент модуляции частоты  $\omega^2 h$  мал, и считая член

$$\omega^2 h \cos \nu t \cdot x \quad (82)$$

внешним возбуждением, подсчитаем выражение для средней мощности.

Здесь уже в первом приближении имеем:

$$A = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \omega^2 h \cos \nu t \cos(\omega t + \psi) a \omega \sin(\omega t + \psi) dt = \\ = \frac{\omega^3 h}{4T} \left[ \frac{\cos[(\nu + 2\omega)t + 2\psi]}{\nu + 2\omega} - \frac{\cos[(\nu - 2\omega)t - 2\psi]}{\nu - 2\omega} \right]_{t_0}^{t_0+T}, \quad (83)$$

и, следовательно, работа, произведенная возмущающей силой (82), в среднем за большой промежуток времени практически не исчезает в случае, если  $\nu \approx 2\omega$ , т. е.  $\omega \approx \frac{\nu}{2}$ .

Таким образом, в колебательной системе, описываемой уравнением (81), мы уже в первом приближении можем обнаружить резонанс деления частоты на два.

Рассмотрим еще влияние внешнего гармонического возбуждения на автоколебательную систему. Для этого возьмем обобщенное уравнение Ван-дер-Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = E \sin \nu t. \quad (84)$$

Предполагая, что  $\nu$  не принимает значений, близких к единице, произведем замену переменных согласно формуле

$$x = y + U \sin \nu t, \quad (85)$$

$$\text{где } U = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon [1 - (y + U \sin \nu t)^2] \left[ \frac{dy}{dt} + U \nu \cos \nu t \right]. \quad (86)$$

Проанализируем, какие резонансы могут быть обнаружены в первом приближении для данного уравнения.

Подсчитывая среднюю мощность, производимую малой возмущающей силой,

$$\varepsilon [1 - (y + U \sin \nu t)^2] \left[ \frac{dy}{dt} + U \nu \cos \nu t \right] \quad (87)$$

в режиме чисто гармонического колебания

$$y = a \cos(\omega t + \phi),$$

$$\frac{dy}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \phi),$$

нетрудно заметить, что она не исчезает, если  $2\omega \approx v$ , а также если  $2v \approx \omega$ , причем резонанс  $2\omega \approx v$  возникает от слагаемого возмущающей силы (87), амплитуда которого пропорциональна  $U$ , а резонанс  $2v \approx \omega$  — от слагаемого, амплитуда которого пропорциональна  $U^2$ .

Таким образом, если  $E$  — величина малая, то резонанс  $2\omega \approx v$  можно обнаружить во втором приближении, а резонанс  $2v \approx \omega$  — только в третьем приближении.

Уже из сделанного предварительного анализа ясно, что в случаях резонанса весьма слабые периодические возмущения могут оказывать существенное влияние на протекание колебательного процесса в течение достаточно больших интервалов времени.

При этом в отличие от возмущений, не зависящих явно от времени, типа  $\epsilon f(x, \frac{dx}{dt})$ , здесь существенную роль будут играть фазовые соотношения.

В самом деле, взяв типичную формулу (80) и положив в ней для простоты  $\omega = v$ , найдем:

$$A \approx -\frac{a\omega E}{2} \sin \phi. \quad (88)$$

Итак, при  $\sin \phi < 0$  энергия поступает в систему, при  $\sin \phi > 0$  энергия забирается из системы. Уже на этом простом примере мы видим важность фазовых соотношений в случае резонанса.

Поэтому приближенные уравнения, определяющие протекание колебания, должны включить не только амплитуду, но и фазу колебания, так что вместо одного уравнения (70) мы будем теперь иметь систему двух связанных уравнений типа

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F(a, \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Phi(a, \phi). \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Вопрос о фактическом определении правых частей этих уравнений применительно к первому и высшим приближениям рассмотрен в главе III. В этой главе будут изложены расчетные, асимптотические методы, подтверждающие правильность приведенных здесь предварительных рассуждений качественного характера и дающие им надлежащее развитие.

В рассмотренных выше примерах мы имели дело с колебательными системами, описываемыми уравнениями типа

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f(vt, x, \frac{dx}{dt}), \quad (90)$$

где  $f(vt, x, \frac{dx}{dt})$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$  относительно  $vt$ .

В случае нелинейного вибратора мы имеем:

$$\epsilon f(vt, x, \frac{dx}{dt}) = \epsilon f(x, \frac{dx}{dt}) + \epsilon E \cos vt.$$

В случае уравнения (81) (уравнение Матье):

$$\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = -\omega^2 h \cos \nu t \cdot x.$$

Следует подчеркнуть, что к уравнению такого вида сводится большое число практически важных колебательных систем.

Примером колебательной системы, описываемой уравнением (77), может являться задача о колебаниях груза единичной массы, подвешенного на пружине с нелинейной характеристикой упругости при наличии трения и находящегося под воздействием возмущающей силы  $\varepsilon E \cos \nu t$  (рис. 19).

Задача о крутильных колебаниях вала, состоящего из двух масс, соединенных при помощи нелинейной упругой связи, на одну из

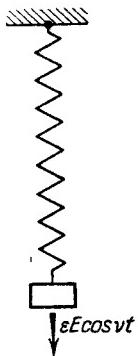


Рис. 19.

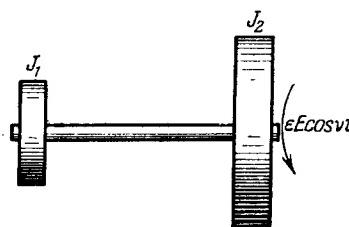


Рис. 20.

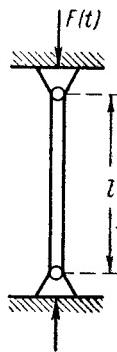


Рис. 21.

которых действует синусоидальный крутящий момент  $F(t) = \varepsilon E \cos \nu t$  (рис. 20), приводится к уравнению вида

$$J_1 J_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (J_1 + J_2) c(\theta) + f\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \varepsilon E \cos \nu t, \quad (91)$$

также принадлежащему к уравнению типа (77). Здесь  $J_1$  и  $J_2$  — моменты инерции масс,  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  — угол скручивания,  $f\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$  — функция скорости, учитывающая влияние трения.

Задача о колебаниях маятника, находящегося под воздействием внешней периодической силы, также приводится к уравнению типа (77) и т. д.

К уравнению типа Матье (81) сводится, например, задача о поперечных колебаниях шарнирно закрепленного стержня, находящегося под воздействием продольной пульсирующей силы  $F(t) = \varepsilon E_1 \cos \nu t$ .

В этом случае получаем уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 \left[ 1 - \frac{l^2 \varepsilon E_1}{E J \pi} \cos \nu t \right] x = 0, \quad (92)$$

где введены обозначения:  $EJ$  — жесткость стержня,  $l$  — длина стержня (рис. 21).

Уравнение более общего типа, чем уравнение Матье, имеет место при рассмотрении нелинейного вибратора, в котором некоторые пара-

метры, например собственная частота соответствующей линейной системы, периодически изменяются.

Тогда имеем уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(1 + h \sin \nu t) x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (93)$$

В качестве примера рассмотрим колебания в контуре, состоящем из обычной самоиндукции  $L$ , катушки с характеристикой (магнитный поток — ток) вида

$$\Phi = \Phi(i),$$

малого омического сопротивления  $R$  и переменной емкости

$$C = C_0(1 + \rho \sin \nu t)$$

(рис. 22).

Тогда полный поток магнитной индукции в контуре будет:

$$Li + \Phi(i),$$

и, таким образом, имеем следующее уравнение:

$$\frac{d[Li + \Phi(i)]}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0, \quad (94)$$

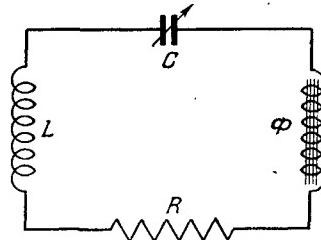


Рис. 22.

или, вводя в качестве неизвестной заряд на обкладках конденсатора

$$q = \int_0^t i dt,$$

получим:

$$\left\{L + \Phi'\left(\frac{dq}{dt}\right)\right\} \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_0(1 + \rho \sin \nu t)} = 0. \quad (95)$$

Предполагая, что самоиндукция  $L$  достаточно велика по сравнению с «нелинейной самоиндукцией»:

$$L \gg \Phi'(i),$$

и, кроме того, коэффициент  $\rho$ , характеризующий «глубину изменения» емкости, достаточно мал, можем уравнение (95) с точностью до величин второго порядка малости привести к виду

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2(1 - \rho \sin \nu t) q = -\frac{R}{L} \left(1 - \frac{\Phi'\left(\frac{dq}{dt}\right)}{L}\right) \frac{dq}{dt} + \omega^2 \frac{\Phi\left(\frac{dq}{dt}\right)}{L} q, \quad (96)$$

где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

В качестве примера автоколебательной системы, находящейся под воздействием внешнего синусоидального возбуждения, рассмотрим регенеративный приемник, схематически приведенный на рис. 23.

В этом случае получаем уравнение

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a, \quad (97)$$

причем

$$i_a = f(V_s) \quad (98)$$

— характеристика лампы.

Так как

$$V_s = M_r \frac{di}{dt} + E_0 \sin \nu t, \quad (99)$$

где  $M_r = M - DL$ , то подстановкой

$$i_1 = i - \frac{E_0}{M_r \nu} \cos \nu t \quad (100)$$

уравнение (97) можно привести к виду

$$CL \frac{d^2 i_1}{dt^2} + RC \frac{di_1}{dt} + i_1 = f\left(M_r \frac{di_1}{dt}\right) + E_1 \cos(\nu t + \varphi), \quad (101)$$

где

$$E_1 = \frac{E_0 C \sqrt{(LC\nu^2 - 1)^2 + R^2 C^2 \nu^2}}{M_r \nu}.$$

Уравнение (101) принадлежит к типу уравнения (93), а при помощи подстановки

$$i_1 = I + \frac{E_1}{\omega^2 - \nu^2} \cos(\nu t + \varphi), \quad (102)$$

где  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ , приводится к виду (86).

Рассмотрим еще некоторые примеры, приводящиеся к более сложным уравнениям, чем уравнения типа (67) или (90).

В качестве первого примера рассмотрим задачу о колебаниях маятника с переменной длиной.

Пусть  $m$  обозначает массу маятника,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\vartheta$  — угол отклонения от вертикального положения,  $l = l(t)$  — длину маятника, зависящую от времени. Тогда, пренебрегая силой трения, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ m l^2(t) \frac{d\vartheta}{dt} \right] + gl(t) \sin \vartheta = 0. \quad (103)$$

Рассмотрим еще работу отражательного кристалла в режиме сверхрекогенеративного усиления. Пусть  $G_E = G_R + G_H$  — суммарная активная проводимость;  $G_R$  — проводимость, характеризующая потери в резонаторе;  $G_H$  — проводимость, характеризующая нагрузку;  $G_e$  — активная часть электронной проводимости;  $E(t)$  — э. д. с. сигнала;  $\mathcal{E}(t)$  — переменное напряжение суперизделия.

Тогда уравнение, характеризующее работу кристалла, будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \rho (G_E - G_e) \frac{du}{dt} + u = E(t) \sin(1 + \mathcal{E}(t)) \omega_0 t, \quad (104)$$

где  $\rho = \omega_0 L$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Если в уравнениях (103) и (104) коэффициенты, являясь переменными, изменяются медленно, что мы будем обозначать в дальнейшем

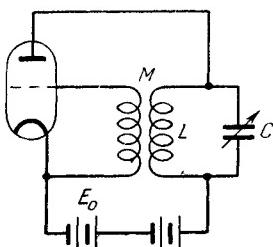


Рис. 23.

в виде зависимости не от  $t$ , а от  $\tau$ , где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр, то эти уравнения будут принадлежать к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (105)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon f\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (106)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau)$ .

К уравнениям типа (105) или (106) приводятся многие задачи физики и техники, как, например, задача о прохождении через резонанс, исследование неустановившихся процессов в колебательных контурах, вопросы частотной модуляции, ряд задач из теории ускорительных устройств и т. д.

До сих пор мы рассматривали воздействие внешних периодических сил на колебательные системы, близкие к линейным. Можно, однако, также рассмотреть вопрос о влиянии малых периодических возмущающих сил и на релаксационные колебательные системы, описываемые, например, уравнением типа

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos vt, \quad (107)$$

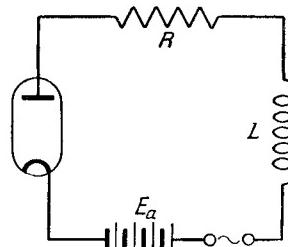


Рис. 24.

где, как и в случае уравнения (75) свободных релаксационных колебаний,  $\Phi(x)$  представляет определенную на интервале  $(a, b)$  двузначную функцию.

В частности мы получим уравнение (107), если в ранее рассматривавшейся схеме генератора релаксационных колебаний включим последовательно с постоянным напряжением  $E_a$  переменное гармоническое напряжение  $\varepsilon E_v \cos vt$ .

Так, для схемы, приведенной на рис. 24, имеем, очевидно:

$$\frac{di}{dt} = \Phi(i) + \frac{\varepsilon E_v \cos vt}{L}. \quad (108)$$

Ввиду того, что в свободных релаксационных колебаниях существенную роль играют обертоны вплоть до весьма большого порядка, мы видим, анализируя выражение

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon E_v \cos vt \frac{dx}{dt} dt,$$

что в системе имеют место резонансы типа деления частоты

$$v = \frac{\omega}{n},$$

где  $n$  может быть достаточно большим числом.

Поэтому резонансы деления частоты на большое число удобнее всего наблюдать на релаксационных системах.

# ГЛАВА I

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

### § 1. Построение асимптотических решений

Перейдем к изложению метода построения асимптотических приближений, в первую очередь для случая колебаний, определяемых дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

К правильной формулировке этого метода мы можем прийти, исходя из физических представлений о характере рассматриваемого колебательного процесса.

Так, при отсутствии возмущения, т. е. при  $\varepsilon = 0$ , колебания, очевидно, будут чисто гармоническими

$$x = a \cos \phi$$

с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (\phi = \omega t + \theta)$$

(амплитуда  $a$  и фаза  $\theta$  колебания будут постоянными по времени величинами, зависящими от начальных условий).

Наличие нелинейного возмущения ( $\varepsilon \neq 0$ ) приводит к появлению в решении уравнения (1.1) обертонаов, обусловливает зависимость мгновенной частоты  $\frac{d\psi}{dt}$  от амплитуды  $a$ , и, наконец, может вызывать систематическое увеличение или уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от пригода или поглощения энергии возмущающими силами.

Все эти эффекты возмущения, очевидно, исчезают в предельном случае ( $\varepsilon = 0$ ).

Принимая все это во внимание, будем искать общее решение рассматриваемого уравнения (1.1) в виде разложения\*)

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi) + \varepsilon^2 u_2(a, \phi) + \varepsilon^3 u_3(a, \phi) + \dots, \quad (1.2)$$

в котором  $u_1(a, \phi)$ ,  $u_2(a, \phi)$ , ... являются периодическими функциями угла  $\phi$  с периодом  $2\pi$ , а величины  $a$ ,  $\phi$  как функции времени опреде-

---

\*) Впервые такая формулировка метода разложения по малому параметру была дана в книге Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Введение в нелинейную механику» [22].

ляются дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Итак, перед нами возникает задача подбора соответствующих выражений для функций  $u_1(a, \psi)$ ,  $u_2(a, \psi)$ ,  $\dots$ ,  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $A_2(a)$ ,  $B_2(a)$ ,  $\dots$  таким образом, чтобы выражение (1.2), в которое вместо  $a$  и  $\psi$  будут подставлены функции времени, определенные уравнениями (1.3), оказалось бы решением исходного уравнения (1.1).

Как только эта задача будет решена и будут найдены явные выражения для коэффициентов разложений, стоящих в правых частях (1.2), (1.3), вопрос об интегрировании уравнения (1.1) сводится к более простому вопросу об интегрировании уравнений (1.3) с разделяющимися переменными, допускающему исследование с помощью известных элементарных приемов.

Как мы увидим далее, определение коэффициентов указанных разложений не представляет принципиальных затруднений, однако ввиду быстрого усложнения формул практически могут быть найдены обычно лишь два-три первых члена.

Останавливаясь в наших разложениях на этих членах, т. е. полагая

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^m u_m(a, \psi) \quad (1.4)$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^m A_m(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

мы сможем получить приближения первого, второго и т. д., вообще небольшого, порядка, и потому практическая применимость метода определяется не свойствами сходимости сумм (1.4), (1.5) при  $m \rightarrow \infty$ , а их асимптотическими свойствами для данного фиксированного  $t$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Требуется лишь, чтобы при малом  $\varepsilon$  выражение (1.4) давало бы достаточно точное представление решения уравнения (1.1) для достаточно длительного интервала времени. Поэтому мы не будем здесь изучать проблему сходимости при  $m \rightarrow \infty$  и условимся рассматривать разложения (1.2), (1.3) как формальные разложения, необходимые для построения асимптотических приближений (1.4).

Иначе говоря, поставим задачу более осторожно, сформулировав ее как задачу о нахождении таких функций:

$$u_1(a, \psi), u_2(a, \psi), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots, \quad (1.6)$$

чтобы выражение (1.4), в котором функции времени  $a, \psi$  определяются «уравнениями  $m$ -го приближения» (1.5), удовлетворяло уравнению (1.1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ .

Заметим, что как раз в рассматриваемом случае уравнения (1.1) можно было бы установить сходимость разложений (1.2), (1.3) при весьма общих условиях, наложенных на функцию  $f(x, \frac{dx}{dt})$ . Поскольку, однако,

в дальнейшем придется иметь дело со случаями, в которых аналогичные разложения заведомо расходятся, мы не будем связывать изложение нашего метода построения асимптотических приближений с доказательствами сходимости и потому всегда, без дальнейших оговорок, будем придавать рядам, расположенным по степеням малого параметра, вышеуказанный формальный смысл.

Скажем еще несколько слов об оценке погрешности. Из того факта, что получаемое приближенное решение удовлетворяет уравнению (1.1) с ошибкой порядка  $\varepsilon^{m+1}$ , с помощью обычного мажорационного приема устанавливается, что отклонение приближенного решения от соответствующего точного (при согласовании начальных условий) будет ограничиваться величиной порядка  $\varepsilon^{m+1}t$  и, таким образом, это отклонение остается малым при сколь угодно больших значениях  $\varepsilon t$ , если только само  $\varepsilon$  достаточно мало. Здесь имеем основное отличие от приближенных формул (6), рассматривавшихся во введении, которые были применимы только при малых значениях  $\varepsilon t$ , т. е. только на таком интервале времени, в течение которого амплитуда колебаний не успеет заметно отойти от своего начального значения.

Заметим, что вопросы строгого обоснования асимптотических методов представляют особую, чисто математическую проблему, имеющую значение для теории дифференциальных уравнений с малым параметром.

Мы сочли поэтому целесообразным отнести обсуждение их в главу VI, являющуюся математическим дополнением к основному тексту книги. Здесь же сосредоточим внимание на проблеме фактического построения приближенных решений и применении их к исследованию конкретных примеров, причем на ряде примеров, для которых известны точные решения, будет проиллюстрирована эффективность метода и точность приближенных формул.

Прежде чем перейти к проблеме построения приближенных решений, заметим, что задача определения выражений (1.6) содержит некоторый произвол.

В самом деле, допустим, что найдены какие-то выражения для этих функций. Беря после этого произвольные функции

$$\alpha_1(a), \alpha_2(a), \dots, \beta_1(a), \beta_2(a), \dots$$

и совершая в (1.2), (1.3) замену переменных

$$\begin{aligned} a &= b + \varepsilon \alpha_1(b) + \varepsilon^2 \alpha_2(b) + \dots, \\ \psi &= \varphi + \varepsilon \beta_1(b) + \varepsilon^2 \beta_2(b) + \dots, \end{aligned}$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= b \cos \varphi + \varepsilon [\alpha_1(b) \cos \varphi - b \beta_1(b) \sin \varphi + u_1(b, \varphi)] + \varepsilon^2 \dots, \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon A_1(b) + \varepsilon^2 \left[ \frac{dA_1(b)}{db} \alpha_1(b) - \frac{d\alpha_1(b)}{db} A_1(b) + A_2(b) \right] + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(b) + \varepsilon^2 \left[ \frac{dB_1(b)}{db} \beta_1(b) - \frac{d\beta_1(b)}{db} B_1(b) + B_2(b) \right] + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Как видно из (1.7), мы опять пришли к формулам типа (1.2), (1.3), только уже с измененными выражениями коэффициентов (1.6). Поэтому для однозначности определения этих коэффициентов следует наложить на них дополнительные условия, что можно сделать, вообще говоря, с известным произволом. В качестве этих дополнительных условий

примем условия отсутствия первой гармоники в выражениях  $u_1(a, \phi)$ ,  $u_2(a, \phi), \dots$ . Иначе говоря, будем так определять эти периодические функции фазового угла, чтобы выполнялись равенства

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} u_1(a, \phi) \cos \phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} u_2(a, \phi) \cos \phi d\phi = 0, \dots \\ \int_0^{2\pi} u_1(a, \phi) \sin \phi d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} u_2(a, \phi) \sin \phi d\phi = 0, \dots \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

С физической точки зрения принятие этих условий соответствует выбору в качестве величины  $a$  полной амплитуды первой основной гармоники колебания.

После сделанных предварительных замечаний перейдем к поставленной задаче о нахождении подходящих выражений для (1.6) с учетом дополнительных условий (1.8).

Дифференцируя правую часть (1.2), находим:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots \\ \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} + \\ \quad + \frac{d\psi}{dt} \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} + \\ \quad + \frac{d^2\psi}{dt^2} \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\} + \\ \quad + \left( \frac{da}{dt} \right)^2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} + \\ \quad + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \left\{ -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right\} + \\ \quad + \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \left\{ -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \dots \right\}. \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

Учитывая уравнения (1.3), можем найти следующие величины:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2a}{dt^2} = \left( \varepsilon \frac{dA_1}{da} + \varepsilon^2 \frac{dA_2}{da} + \dots \right) (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) = \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} = \left( \varepsilon \frac{dB_1}{da} + \varepsilon^2 \frac{dB_2}{da} + \dots \right) (\varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots) = \varepsilon^2 A_1 \frac{dB_1}{da} + \varepsilon^3 \dots, \\ \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)^2 = \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} = (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) (\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots) = \\ \quad = \varepsilon A_1 \omega + \varepsilon^2 (A_2 \omega + A_1 B_1) + \varepsilon^3 \dots, \\ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = (\omega + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots)^2 = \\ \quad = \omega^2 + \varepsilon 2\omega B_1 + \varepsilon^2 (B_1^2 + 2\omega B_2) + \varepsilon^3 \dots \end{array} \right\} \quad (1.10)$$

Подставив (1.3), (1.10) в (1.9) и располагая результат по степеням параметра  $\epsilon$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \psi + \varepsilon \left\{ A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ A_2 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega^2 \cos \psi + \varepsilon \left\{ -2\omega A_1 \sin \psi - 2\omega a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left( A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 - 2\omega a B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ &- \left( 2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \\ &\quad \left. + 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \right\} + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

откуда следует, что левую часть уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = & \varepsilon \left\{ -2\omega A_1 \sin \psi - 2\dot{\omega} a B_1 \cos \psi + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_1 \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \left( A_1 \frac{dA_1}{da} - a B_1^2 - 2\omega a B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ & - \left( 2\omega A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \\ & \left. + 2\dot{\omega} B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2 u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (1.12) \end{aligned}$$

Правую часть уравнения (1.1), учитывая (1.2) и (1.11), можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \varepsilon^2 \left\{ u_1 f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \left( A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) f''_{xx}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (1.43) \end{aligned}$$

Для того чтобы рассматриваемое выражение (1.2) удовлетворяло исходному уравнению (1.1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ , необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в правых частях (1.12) и (1.13) до членов  $m$ -го порядка включительно.

В результате получим следующие уравнения:

где для сокращения введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \psi) &= f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \\ f_1(a, \psi) &= u_1 f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &+ \left[ A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right] f'_{x'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &+ \left( aB_1^2 - A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos \psi + \left( 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi - \\ &- 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Нетрудно видеть, что  $f_k(a, \phi)$  есть периодическая функция переменной  $\phi$  с периодом  $2\pi$ , зависящая от  $a$ ; ее явное выражение известно, как только найдены выражения  $A_j(a)$ ,  $B_j(a)$ ,  $u_j(a, \phi)$  до  $k$ -го номера включительно.

Чтобы определить  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $u_1(a, \phi)$  из первого уравнения системы (1.14), рассмотрим разложения Фурье для функций  $f_0(a, \phi)$  и  $u_1(a, \phi)$ :

$$\left. \begin{aligned} f_0(a, \phi) &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(a) \cos n\phi + h_n(a) \sin n\phi\}, \\ u_1(a, \phi) &= v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{v_n(a) \cos n\phi + w_n(a) \sin n\phi\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Подставляя правые части выражений (1.16) в первое уравнение системы (1.14), получим выражение

$$\begin{aligned} \omega^2 v_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2 (1-n^2) \{v_n(a) \cos n\phi + w_n(a) \sin n\phi\} = \\ = g_0(a) + \{g_1(a) + 2\omega a B_1\} \cos \phi + \{h_1(a) + 2\omega A_1\} \sin \phi + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{g_n(a) \cos n\phi + h_n(a) \sin n\phi\}, \end{aligned}$$

из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, найдем:

$$\left. \begin{aligned} g_1(a) + 2\omega a B_1 &= 0, & h_1(a) + 2\omega A_1 &= 0, \\ v_0(a) = \frac{g_0(a)}{\omega^2}, & \quad v_n(a) = \frac{g_n(a)}{\omega^2(1-n^2)}, & w_n(a) = \frac{h_n(a)}{\omega^2(1-n^2)} \\ & & (n = 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Таким образом, нами однозначно определены  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$ , а также все гармонические компоненты функции  $u_1(a, \phi)$ , кроме первых  $v_1(a)$  и  $w_1(a)$ . Однако в силу дополнительных условий (1.8) эта функция не содержит первой гармоники, поэтому

$$v_1(a) = 0, \quad w_1(a) = 0$$

и, следовательно,

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1-n^2}. \quad (1.18)$$

Определив полностью  $u_1(a, \psi)$ ,  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$ , мы тем самым в соответствии с (1.15) имеем явное выражение для  $f_1(a, \psi)$ . Разлагая его в ряд Фурье

$$f_1(a, \psi) = g_0^{(1)}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi\}$$

и воспользовавшись вторым из уравнений (1.14) и условием (1.8), совершенно аналогично находим:

$$g_1^{(1)}(a) + 2\omega B_2 = 0, \quad h_1^{(1)}(a) + 2\omega A_2 = 0 \quad (1.19)$$

и

$$u_2(a, \psi) = \frac{g_0^{(1)}(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n^{(1)}(a) \cos n\psi + h_n^{(1)}(a) \sin n\psi}{1-n^2}.$$

Таким образом, получается процесс для последовательного однозначного определения интересующих нас величин (1.6).

Изложенный метод действительно позволяет определить

$$u_n(a, \psi), \quad A_n(a), \quad B_n(a) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

до какого угодно высокого значения индекса  $n$  и тем самым построить приближенные решения, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению (1.1) с точностью до величин сколь угодно высокого порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ .

Как видно из процесса определения функций (1.6), величины  $A_n(a)$ ,  $B_n(a)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) однозначно определяются условиями (1.8), выражающими отсутствие в функциях  $u_n(a, \psi)$  первой гармоники. В результате получаем для  $A_n(a)$ ,  $B_n(a)$  выражения типа (1.17) или (1.19), которые обеспечивают отсутствие в правых частях уравнений (1.14) членов с первыми гармониками, что в свою очередь дает возможность избежать появления в решении секулярных членов.

Рассмотрим первое приближение:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi), \quad (1.20)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Заметим, что, исходя из (1.21), можем написать:

$$\Delta a = a(t) - a(0) \sim \varepsilon t \tilde{A}_1,$$

$$\Delta(\psi - \omega t) = [\psi(t) - \omega t] - \psi(0) \sim \varepsilon t \tilde{B}_1,$$

где  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{B}_1$  — некоторые средние значения  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  на интервале  $(0, t)$ . Рассматривая последние выражения, видим, что время  $t$ , в течение которого величины  $a$  и  $\psi - \omega t$  смогут получить конечные приращения, должно быть порядка  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

С другой стороны, уравнения первого приближения (1.21) получаются после пренебрежения в уравнениях (1.3) членами порядка малости

сти  $\varepsilon^2$ , а такая ошибка в значениях первых производных  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$  за время  $t$  приводит к ошибке порядка  $\varepsilon^2 t$  в значениях самих функций  $a$  и  $\phi$ . Мы видим, следовательно, что в том интервале времени, в течение которого  $a$ ,  $\phi = \omega t$  успеют заметно отойти от своих начальных значений, погрешности в значениях амплитуды и фазы колебаний будут величинами порядка  $\varepsilon$  и потому в этом интервале в выражении (1.20) не имеет смысла сохранять член  $\varepsilon u_1(a, \phi)$  первого порядка малости, поскольку как погрешность формулы (1.20), так и погрешность упрощенной формулы

$$x = a \cos \phi$$

будут величинами первого порядка малости.

Рассмотрим еще случай стационарных колебаний, т. е. колебаний, совершающихся с постоянной амплитудой и частотой. В этом случае очевидно, имеем:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

или

$$\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots = 0. \quad (1.22)$$

Из-за присутствия множителя  $\varepsilon$  перед  $A_1(a)$  видно, что если в выражении (1.22) мы отбросим величины, начиная со второго порядка малости, и будем определять значение стационарной амплитуды первой гармоники из уравнения первого приближения

$$A_1(a) = 0,$$

то тем самым мы совершим ошибку, вообще говоря, не второго порядка, а уже первого порядка малости.

Принимая все это во внимание, естественно в дальнейшем брать в качестве первого приближения упрощенное выражение

$$x = a \cos \phi, \quad (1.23)$$

в котором  $a$  и  $\phi$  определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Рассуждая совершенно аналогично, в качестве второго приближения возьмем выражение

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi), \quad (1.25)$$

в котором функции времени  $a$  и  $\phi$  определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Приведем здесь также явные формулы для  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $B_2(a)$  и  $u_1(a, \phi)$ . Из (1.15), (1.16) и (1.17) имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Далее, из (1.18) следует, что

$$u_1(a, \phi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\phi + h_n(a) \sin n\phi}{n^2 - 1}, \quad (1.28)$$

где  $g_n(a)$  и  $h_n(a)$  находим по формулам

$$\left. \begin{aligned} g_n(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos n\phi d\psi, \\ h_n(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin n\phi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Наконец, в силу (1.15) и (1.19) можем написать:

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ 2A_1B_1 + A_1 \frac{dA_1}{da} a \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} \left[ u_1(a, \phi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \left( A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \phi} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times f''_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right] \sin \psi d\psi, \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ B_1^2 - \frac{A_1}{a} \frac{dA_1}{da} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} \left[ u_1(a, \phi) f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \left( A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega \frac{\partial u_1}{\partial \phi} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times f''_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \right] \cos \psi d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Заметим, что уравнения второго приближения (1.26), где  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$  определяются согласно выражениям (1.30), сложны ввиду того, что они записаны в самом общем случае. Для конкретных колебательных систем, как будет показано ниже, эти уравнения значительно упрощаются.

Остановимся теперь на более детальном рассмотрении первого приближения.

В соответствии с формулами (1.23), (1.24) и (1.27) первое приближение для решения уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$x = a \cos \phi, \quad (1.31)$$

где  $a$  и  $\phi$  определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) = \omega_1(a), \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

причем

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \quad (1.33)$$

$$\omega_1(a) = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi. \quad (1.34)$$

Заметим, что полученные нами уравнения первого приближения совпадают с уравнениями, найденными по методу Ван-дер-Поля.

Выведем теперь еще одну формулу для определения мгновенной собственной частоты  $\omega_1(a)$ .

Возведя правую часть выражения (1.34) в квадрат, получим:

$$\begin{aligned} \omega_1^2(a) &= \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi + \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 a^2 \omega^2} \left[ \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi \right]^2, \end{aligned}$$

откуда, поскольку все вычисления ведем в первом приближении, отбрасывая члены второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ , имеем:

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} [\omega^2 a \cos \phi - \varepsilon f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi)] \cos \phi d\phi. \quad (1.35)$$

Выражение для квадрата мгновенной собственной частоты (1.35) можно упростить.

Введем функцию

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \omega^2 x - \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

объединив «квазиупругий член» с нелинейным.

Тогда, очевидно,

$$\omega_1^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi. \quad (1.36)$$

Аналогично, принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} \omega^2 a \cos \phi \sin \phi d\phi = 0,$$

имеем также:

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} F(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi. \quad (1.37)$$

В полученных формулах (1.36) и (1.37) функции  $\varepsilon A_1(a)$  и  $\omega_1(a)$  представлены непосредственно с помощью функции  $F(x, \frac{dx}{dt})$ , что отличает их от формул (1.33) и (1.34), где фигурирует лишь нелинейный поправочный член. Входящая в последние две формулы величина  $\omega$  может быть, очевидно, интерпретирована как приближенное значение (нулевое приближение) частоты колебаний рассматриваемой системы.

Приведем теперь еще один способ получения уравнений первого приближения. Прежде всего напомним, что при  $\varepsilon = 0$  уравнение (1.1) допускает решение:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos \phi, \\ \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \phi, \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

где  $\phi = \omega t + \theta$ , причем амплитуда  $a$  и фаза колебания  $\theta$  являются постоянными величинами.

Нетрудно, однако, убедиться, что формулы (1.38) могут быть оставлены и в случае  $\varepsilon \neq 0$  при условии, что величины  $a$  и  $\theta$  мы будем рассматривать не как постоянные, а как некоторые функции времени.

Будем рассматривать (1.38) как некоторую замену переменных,  $a$  и  $\theta$  — амплитуду и фазу колебания — примем за новые неизвестные функции времени, определив которые, с помощью (1.38) сможем найти искомое выражение для первоначально неизвестной  $x$ . Чтобы составить дифференциальные уравнения для  $a$  и  $\theta$ , продифференцируем обе части первой формулы (1.38). Получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \phi - a\omega \sin \phi, \quad (1.39)$$

откуда, принимая во внимание второе соотношение (1.38), имеем уравнение

$$\frac{da}{dt} \cos \phi - a \frac{d\theta}{dt} \sin \phi = 0. \quad (1.40)$$

Продифференцировав обе части второй формулы (1.38), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{da}{dt} \omega \sin \phi - a\omega \frac{d\theta}{dt} \cos \phi - a\omega^2 \cos \phi. \quad (1.41)$$

Подставляя теперь в уравнение (1.1) вместо  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  соответственно их значения, взятые согласно формулам (1.38) и (1.41), найдем:

$$-\omega \frac{da}{dt} \sin \phi - a\omega \frac{d\theta}{dt} \cos \phi = \varepsilon f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi). \quad (1.42)$$

Решая систему двух уравнений (1.40) и (1.42) относительно неизвестных  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\theta}{dt}$ , получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi, \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi. \end{array} \right\} \quad (1.43)$$

Итак, вместо одного дифференциального уравнения второго порядка (1.1) относительно переменной  $x$  имеем два дифференциальных уравнения (1.43) первого порядка относительно переменных  $a$  и  $\theta$ .

Заметим, что правые части уравнений (1.43) обладают по отношению к независимой переменной  $t$  периодом, равным  $\frac{2\pi}{\omega}$ , а кроме этого,  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\theta}{dt}$  пропорциональны малому параметру  $\varepsilon$ , так что  $a$  и  $\theta$  будут медленно изменяющимися функциями времени.

Дифференциальные уравнения, приведенные к такому виду, будем называть уравнениями в стандартной форме.

Нетрудно видеть, что правые части уравнений (1.43) могут быть представлены в виде сумм:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi &= \\ = \varepsilon \sum_{\nu} [f_{\nu 1}^{(1)}(a) \cos \nu \phi + f_{\nu 2}^{(1)}(a) \sin \nu \phi], \\ -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi &= \\ = \varepsilon \sum_{\nu} [f_{\nu 1}^{(2)}(a) \cos \nu \phi + f_{\nu 2}^{(2)}(a) \sin \nu \phi]. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Согласно вышеизложенному форма приближенного решения системы уравнений может быть определена из следующих соображений. Так как  $a$  и  $\theta$  — медленно изменяющиеся величины, представим их как суперпозицию плавно изменяющихся членов  $\bar{a}$  и  $\bar{\theta}$  и суммы малых вибрационных членов. В первом приближении положим

$$a = \bar{a}, \quad \theta = \bar{\theta} \quad (\bar{\phi} = \omega t + \bar{\theta}). \quad (1.45)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\bar{a} \cos \bar{\phi}, -\bar{a}\omega \sin \bar{\phi}) \sin \bar{\phi} = \\ &= \varepsilon \sum_{\nu} [f_{\nu 1}^{(1)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\phi} + f_{\nu 2}^{(1)}(\bar{a}) \sin \nu \bar{\phi}], \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(\bar{a} \cos \bar{\phi}, -\bar{a}\omega \sin \bar{\phi}) \cos \bar{\phi} = \\ &= \varepsilon \sum_{\nu} [f_{\nu 1}^{(2)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\phi} + f_{\nu 2}^{(2)}(\bar{a}) \sin \nu \bar{\phi}], \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(1)}(\bar{a}) + \text{малые синусоидальные колебательные члены}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(2)}(\bar{a}) + \text{малые синусоидальные колебательные члены}. \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Считая, что эти синусоидальные колебательные члены вызывают лишь малые вибрации  $a$  и  $\theta$  около их первых приближений  $\bar{a}$  и  $\bar{\theta}$

и не оказывают влияния на систематическое изменение  $a$  и  $\theta$ , приходим к уравнениям первого приближения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(1)}(\bar{a}) = M \left\{ -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\bar{a} \cos \bar{\phi}, -\bar{a}\omega \sin \bar{\phi}) \sin \bar{\phi} \right\}, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \varepsilon f_{01}^{(2)}(\bar{a}) = M \left\{ -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(\bar{a} \cos \bar{\phi}, -\bar{a}\omega \sin \bar{\phi}) \cos \bar{\phi} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

где  $M$  — оператор усреднения при постоянных  $\bar{a}$  и  $\bar{\theta}$  по явно содержащемуся времени.

Нетрудно видеть, что полученные уравнения (1.48) для  $\bar{a}$  и  $\bar{\theta}$  совпадают с ранее найденными уравнениями первого приближения.

Действительно, произведя усреднение и введя вместо  $\theta$  полную фазу колебаний  $\psi$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

Для получения второго приближения необходимо принять во внимание в выражениях для  $a$  и  $\theta$  также и вибрационные члены. Учитывая в (1.47) члены  $\varepsilon f_{\nu 1}^{(i)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\psi}$ ,  $\varepsilon f_{\nu 2}^{(i)}(\bar{a}) \sin \nu \bar{\psi}$  ( $i = 1, 2$ ), как вызывающие в  $a$  и  $\theta$  колебания вида

$$\frac{\varepsilon \sin \nu \bar{\psi}}{\nu} f_{\nu 1}^{(i)}(\bar{a}), \quad \frac{\varepsilon \cos \nu \bar{\psi}}{\nu} f_{\nu 2}^{(i)}(\bar{a}) \quad (i = 1, 2),$$

приходим к следующим приближенным выражениям:

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{a} + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\nu} [f_{\nu 1}^{(1)}(\bar{a}) \sin \nu \bar{\psi} - f_{\nu 2}^{(1)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\psi}], \\ \theta &= \bar{\theta} + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{1}{\nu} [f_{\nu 1}^{(2)}(\bar{a}) \sin \nu \bar{\psi} - f_{\nu 2}^{(2)}(\bar{a}) \cos \nu \bar{\psi}], \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

которые соответствуют улучшенному первому приближению. Подставляя значения (1.49) в правую часть (1.38), получаем с точностью до величин первого порядка малости включительно выражение (1.25).

Для получения уравнений второго приближения, определяющих  $a$  и  $\theta$  с точностью до величин второго порядка малости включительно, необходимо значения (1.49) подставить в правую часть уравнений (1.48) и результат усреднить по явно содержащемуся времени.

Приведенным выше рассуждениям можно придать более обоснованную форму. Для этого необходимо выражения (1.45), (1.49) и т. д. рассматривать как замену переменных в исходной системе дифференциальных уравнений, приведенной к стандартному виду. Однако на этом вопросе остановимся более подробно в конце книги.

Заметим только, что изложенный метод усреднения дифференциальных уравнений, приведенных к стандартному виду, очень облегчает применение методов нелинейной механики для построения приближенных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений.

В настоящем параграфе нами изложен метод построения приближенных решений для уравнений типа (1.1). Не представляет, однако, никаких затруднений распространить его и на уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right), \quad (1.50)$$

где

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right) = \varepsilon f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon^2 f_2\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \dots$$

Здесь правая часть уравнения имеет более сложную зависимость от  $\varepsilon$ . Ввиду отсутствия каких-либо существенных особенностей мы не будем детально останавливаться на последнем уравнении, а перейдем к подробному рассмотрению различных частных случаев, встречающихся на практике.

## § 2. Консервативные системы, близкие к линейным

В качестве частного случая уравнения (1.1) рассмотрим свободные псевдогармонические колебания без затухания некоторой массы  $m$ , т. е. колебания, описываемые уравнением вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + p(x) = 0, \quad (2.1)$$

в котором зависимость

$$F_s = p(x)$$

между упругой силой и перемещением является нелинейной.

Предположим, что эта нелинейность достаточно «слаба», так что можно положить

$$p(x) = kx + \varepsilon \Phi(x). \quad (2.2)$$

Тогда уравнение (2.1) будет принадлежать к рассмотренному типу, причем

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{\Phi(x)}{m}, \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

Для построения первого приближения рассмотрим разложение Фурье для функции  $\Phi(a \cos \phi)$ . Так как эта функция является четной, то в ее разложении в ряд Фурье синусы будут отсутствовать:

$$\Phi(a \cos \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(a) \cos n\phi. \quad (2.4)$$

Отсюда на основании (1.16) и (2.3) получим:

$$g_n(a) = -\frac{C_n(a)}{m}, \quad h_n(a) = 0,$$

откуда находим:

$$A_1(a) = 0, \quad B_1(a) = \frac{1}{2\omega_m a} C_1(a). \quad (2.5)$$

Таким образом, учитывая (1.23), (1.24), в первом приближении имеем:

$$x_1 = a \cos \phi,$$

где  $a$  и  $\phi$  определяются уравнениями

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon C_1(a)}{2\omega m a} = \omega_1(a) \quad (2.6)$$

(значок внизу у  $x$  и  $\omega(a)$  указывает номер приближения).

Из первого уравнения системы (2.6) следует, что амплитуда колебания не зависит от времени и сохраняет свое начальное значение

$$a = a_0 = \text{const.}$$

Ввиду постоянства  $a$  из второго уравнения (2.6) получаем:

$$\phi = \omega_1(a) t + \theta,$$

где  $\theta$  — фазовая постоянная, равная начальному значению фазы  $\phi$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае изучаемое колебание в первом приближении будет гармоническим. Нелинейный характер уравнения (2.1) в первом приближении оказывается, очевидно, лишь в том, что частота колебаний  $\omega_1(a)$  зависит от амплитуды. Иначе говоря, из-за присутствия в уравнении (2.1) нелинейного члена  $\varepsilon\Phi(x)$  колебательная система теряет свою изохронность (изохронностью называется свойство линейных колебательных систем, состоящее в том, что их частота собственных колебаний не зависит от величины амплитуды), причем, как это следует из выражения для  $\omega_1(a)$  (2.6), потеря изохронности будет тем меньше, чем меньше будет  $\varepsilon\Phi(x)$  по сравнению с  $\omega^2 x$ .

Перейдем теперь к построению второго приближения. По формуле (1.18) находим:

$$u_1(a, \phi) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\phi}{n^2 - 1}. \quad (2.7)$$

Подставив найденные выражения (2.5) и (2.7) в (1.30), получим

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= 0, \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left[ \frac{C_1(a)}{2\omega m a} \right]^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2\omega m \pi a} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{C_n(a)}{k(n^2 - 1)} \int_0^{2\pi} \Phi'(a \cos \phi) \cos \phi \cos n\phi d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Поскольку

$$C_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \cos \phi) d\phi,$$

$$C_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \cos \phi) \cos n\phi d\phi \quad (n \geq 1),$$

то, дифференцируя, найдем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi' (a \cos \psi) \cos \psi d\psi = \frac{dC_0(a)}{da},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi' (a \cos \psi) \cos \psi \cos n\psi d\psi = \frac{dC_n(a)}{da}$$

и, следовательно, можем написать:

$$B_2(a) = -\frac{1}{2\omega} \left[ \frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ + \frac{1}{2\omega mka} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da}}{n^2 - 1} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right\}. \quad (2.9)$$

Таким образом, во втором приближении имеем:

$$x_{II} = a \cos \psi - \frac{\epsilon C_0(a)}{k} + \frac{\epsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1}, \quad (2.10)$$

причем

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = 0, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_{II}(a), \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

где

$$\omega_{II}(a) = \omega + \frac{\epsilon C_1(a)}{2\omega ma} - \frac{\epsilon^2}{2\omega} \left[ \frac{C_1(a)}{2\omega ma} \right]^2 + \\ + \frac{\epsilon^2}{2\omega mka} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da}}{n^2 - 1} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right\}. \quad (2.12)$$

Мы видим, что и во втором приближении амплитуда  $a$  не зависит от времени и сохраняет любое свое начальное значение. Фазовый угол  $\psi$  вращается с постоянной скоростью

$$\psi = \omega_{II}(a)t + \theta \quad (\theta = \text{const}),$$

и формула (2.10) дает приближенное представление общего решения (с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^2$ ), содержащего две произвольные постоянные интеграции  $a$  и  $\theta$ . Заметим, что для консервативных колебательных систем, описываемых уравнением типа (2.1), все величины  $A_n(a)$  обращаются в нуль, так что уравнение для амплитуды основной гармоники с точностью до любой степени  $\epsilon$  будет:

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

что выражает условие стационарности колебания с произвольной амплитудой. Так как погрешность формулы (2.10) является величиной порядка  $\epsilon^2$ , то, производя вычисления с той же степенью точности,

находим следующие выражения для максимального и минимального отклонения:

$$\left. \begin{aligned} x_{II\ max} &= a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a)}{n^2-1}, \\ x_{II\ min} &= -a - \frac{\varepsilon C_0(a)}{k} + \frac{\varepsilon}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n(a)}{n^2-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, преобразуем формулу (2.12), служащую для определения зависимости частоты от амплитуды колебания.

Возводя обе части в квадрат и удерживая при этом лишь члены не выше второго порядка малости, получим:

$$\omega_{II}^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma} + \frac{\varepsilon^2}{mka} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n(a) \frac{dC_n(a)}{da}}{n^2-1} - 2C_0(a) \frac{dC_0(a)}{da} \right\}. \quad (2.14)$$

Ограничивааясь первым приближением, имеем:

$$\omega_I^2(a) = \omega^2 + \frac{\varepsilon C_1(a)}{ma}. \quad (2.15)$$

Заметим теперь, что во всех полученных выше формулах линейная и нелинейная слагающие упругой силы входят раздельно.

Линейная слагающая входит посредством множителей  $\omega$  и  $k$ , нелинейная — посредством коэффициентов  $C_n(a)$  разложения (2.4) для функции  $\Phi(a \cos \phi)$ .

Однако нетрудно видеть, что разделение полной упругой силы  $p(x)$  (2.2) на линейную и нелинейную слагающие в значительной степени произвольно, так как постоянную  $k$  можно выбирать различными способами.

Определим ее, например, из того условия, чтобы «нулевое приближение» для частоты колебания  $\omega$  совпадало бы с первым приближением  $\omega_I(a)$ .

Тогда согласно (2.15) получим:

$$C_1(a) = 0. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь разложение Фурье

$$p(a \cos \phi) = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a) \cos n\phi \quad (2.17)$$

и заметим, что в соответствии с (2.2) и (2.4) будет:

$$\left. \begin{aligned} p_n(a) &= \varepsilon C_n(a) \quad (n = 0, 2, 3, 4, \dots), \\ p_1(a) &= ak + \varepsilon C_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Итак, условие (2.16) приводит к следующей формуле для определения эквивалентной жесткости:

$$k = \frac{1}{a} p_1(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} p(a \cos \phi) \cos \phi d\phi. \quad (2.19)$$

Постоянная  $k$  определяется здесь как некоторая функция амплитуды, и поэтому возможность использования формулы (2.19) связана с тем, что сама амплитуда  $a$  является постоянной. Если бы мы рассматривали затухающие псевдогармонические колебания, то такой выбор постоянной  $k$  вообще был бы недопустимым, так как тогда  $\frac{p_1(a)}{a}$  оказалось бы переменной во времени величиной.

Постоянную  $k$  можно определить и иным способом. Рассматривая, например, степенное разложение упругой силы в окрестности точки равновесия

$$p(x) = ax + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots,$$

естественно отнести  $ax$  к линейной части, а остальные члены к нелинейной

$$\epsilon\Phi(x) = \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots,$$

что соответствует выбору  $k$  с помощью формулы

$$k = p'(0). \quad (2.20)$$

Независимо от того или иного способа выбора постоянной  $k$  мы можем, воспользовавшись (2.18), освободить формулы (2.10), (2.13), (2.14), (2.15) от параметра  $\epsilon$ , перестроив их так, чтобы в них входила лишь известная функция  $p(x)$ .

В результате приходим к следующим окончательным формулам: первое приближение

$$\left. \begin{aligned} x_I &= a \cos \phi, \\ \omega_I^2(a) &= \frac{p_1(a)}{ma}; \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

второе приближение

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \phi - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n(a) \cos n\psi}{n^2 - 1}, \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega_I^2(a) + \frac{1}{mka} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n(a) \frac{dp_n(a)}{da}}{n^2 - 1} - 2p_0(a) \frac{dp_0(a)}{da} \frac{1}{mka}. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Как видно, слагаемое

$$\frac{p_n(a) \frac{dp_n(a)}{da}}{mka(n^2 - 1)}$$

представляет влияние  $n$ -й гармоники на собственную частоту, а слагаемое

$$-2 \frac{p_0(a) \frac{dp_0(a)}{da}}{mka}$$

появляется за счет смещения рабочей точки на характеристике в связи с наличием в колебании постоянного члена

$$-\frac{p_0(a)}{k}.$$

В частном случае симметричных колебаний, когда упругая характеристика системы  $F_s = p(x)$  симметрична \*) относительно начала координат, так что значения  $F_s$  для  $\pm x$  равны по величине и противоположны по знаку

$$p(x) = -p(-x),$$

все четные гармоники в разложении (2.17) исчезают и формулы (2.22) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \psi + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\psi}{(2n+1)^2 - 1}, \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega_1^2(a) + \frac{1}{mka} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n+1}(a) \frac{dp_{2n+1}(a)}{da}}{(2n+1)^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Наконец, освободимся также от параметра  $\varepsilon$  в выражениях для максимального и минимального отклонения.

Из (2.13) и (2.18) находим:

$$\left. \begin{aligned} x_{II\ max} &= a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n(a)}{n^2 - 1}, \\ x_{II\ min} &= -a - \frac{p_0(a)}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n p_n(a)}{n^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Чтобы получить представление о практической эффективности найденных приближенных формул, рассмотрим некоторые числовые примеры, для которых известно точное решение.

Рассмотрим уравнение свободных колебаний математического маятника с массой  $m$  и длиной  $l$  без учета трения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (2.25)$$

где  $x$  — угол отклонения маятника от положения равновесия.

В данном примере

$$p(x) = \frac{g}{l} \sin x$$

и разложение (2.17) будет:

$$p(a \cos \psi) = \frac{g}{l} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\psi$$

$(J_k(a)$  — функции Бесселя).

\*) В большинстве практически важных случаев упругая сила симметрична. Несимметричность кривой  $F_s = p(x)$  обусловливается, например, действием постоянной силы.

Согласно (2.21) и (2.23) находим:  
в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} x_I &= a \cos \phi, \\ \left( \frac{\omega_I}{\omega_0} \right)^2 &= \frac{2J_1(a)}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{g}{lm}$ ;

во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \phi + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_I^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\phi}{(2n+1)^2 - 1}, \\ \left( \frac{\omega_{II}}{\omega_0} \right)^2 &= \left( \frac{\omega_I}{\omega_0} \right)^2 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_I^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}(a) J'_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

В частности,

$$x_{I \max} = a, \quad x_{II \ max} = a + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_I^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(a)}{(2n+1)^2 - 1}. \quad (2.28)$$

Рассматривая  $x_{\max}$  и  $\omega$  как функции амплитуды первой гармоники

$$x_{\max} = x_{\max}(a), \quad \omega = \omega(a), \quad (2.29)$$

подсчитаем их приближенные значения для ряда возможных значений  $a$ .

Ввиду весьма быстрой сходимости рядов, стоящих в правых частях выражений (2.27) и (2.28), достаточно при подсчете учитывать в них лишь первые два члена.

Далее, для оценки точности полученных решений (2.28) подсчитаем по таблицам эллиптических функций соответствующие значения (2.29) с помощью точных формул (для тех же значений  $a$ ):

$$\left. \begin{aligned} x(\phi, a) &= \frac{8\sqrt{q}}{1+q} \cos \phi - \frac{8q^{3/2}}{3(1+q^3)} \cos 3\phi + \dots, \\ \frac{\omega}{\omega_0} &= \frac{\pi}{2K}, \\ k &= \sin \frac{x_{\max}}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

здесь, как принято в руководствах по теории эллиптических функций,  $k$  — модуль,  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $q = e^{-\pi \cdot \frac{K'}{K}}$ , а  $K'(k) = K(k')$ , где  $k' = \sqrt{1-k^2}$ .

Результаты вычислений сведены в табл. 1, в которой имеется также графа, указывающая точные  $x_{\max}$  в градусах.

Результаты вычислений свидетельствуют о вполне удовлетворительной точности, в особенности если принять во внимание, что наши приближенные формулы выведены в предположении, что упругая характеристика восстанавливающей силы обладает «слабой» нелинейностью — близка к прямолинейной. В рассматриваемом примере даже при углах отклонения маятника около  $160^\circ$  относительная погрешность первого приближения частоты составляет 5,5%, а второго — всего около 3%, хотя очевидно, что в пределах от  $-160^\circ$  до  $+160^\circ$  синус весьма плохо

аппроксимируется прямой. При колебаниях маятника в пределах примерно от  $-30^\circ$  до  $+30^\circ$  первое приближение частоты дает четыре точных знака, а для углов между  $\pm 45^\circ$  второе приближение дает пять точных знаков. Следовательно, там, где характеристика действительно близка к линейной, полученные приближенные формулы обладают высокой степенью точности.

Таблица 1

$x_{I \max} = a$	$x_{II \max}$	$x_{\max}$	$\frac{\omega_I}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{II}}{\omega_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$x_{0 \max}^0$
0,2	0,19996	1,19996	0,99751	0,99751	0,99751	$11^\circ 27' 25''$
0,4	0,39966	0,39968	0,99002	0,99003	0,99003	$22^\circ 53' 46''$
0,6	0,5988	0,5989	0,97759	0,97763	0,97763	$34^\circ 18' 52''$
0,8	0,7972	0,7973	0,9602	0,96040	0,96040	$45^\circ 40' 55''$
1,0	0,9944	0,9946	0,9381	0,93847	0,93846	$56^\circ 59' 11''$
1,2	1,1900	1,1906	0,9113	0,91201	0,91198	$68^\circ 12' 59''$
1,4	1,3835	1,3846	0,8799	0,88122	0,88114	$79^\circ 19' 54''$
1,6	1,5743	1,5763	0,844	0,8463	0,8461	$90^\circ 18' 55''$
1,8	1,761	1,765	0,804	0,8076	0,8072	$101^\circ 07' 37''$
2,0	1,943	1,951	0,759	0,7654	0,7646	$111^\circ 47' 03''$
2,2	2,118	2,132	0,711	0,7200	0,7185	$122^\circ 09' 17''$
2,4	2,283	2,307	0,658	0,6719	0,6698	$132^\circ 10' 53''$
2,6	2,432	2,476	0,602	0,6216	0,6138	$141^\circ 51' 52''$
2,8	2,558	2,635	0,541	0,5699	0,5610	$150^\circ 58' 28''$
3,0	2,642	2,783	0,475	0,5179	0,5023	$159^\circ 27' 15''$

Ухудшение точности для углов, близких к  $180^\circ$ , объясняется тем, что это значение является критическим: при переходе через него изменяется характер движения — колебания сменяются вращением.

Остановимся теперь на исследовании небольших колебаний маятника. В этом случае можем в уравнении (2.25)  $\sin x$  заменить двумя или тремя (в зависимости от того, на каком приближении собираемся остановиться) первыми членами тейлоровского разложения \*).

Получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = 0. \quad (2.31)$$

Применив к этому уравнению формулы (2.21), находим (ограничиваясь двумя членами в разложении для синуса):

$$\begin{aligned} x_I &= a \cos \phi, \\ \frac{\omega_I^2(a)}{\omega_0^2} &= 1 - \frac{a^2}{8}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

\* ) Заметим при этом, что разность

$$\sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} \right)$$

по абсолютной величине не превзойдет 0,000326, если  $x$  колеблется между  $-30^\circ$  и  $30^\circ$ , а разность

$$\sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)$$

не превзойдет 0,000002.

откуда

$$\frac{\omega_I(a)}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{8}} \approx 1 - \frac{a^2}{16}. \quad (2.33)$$

Из формулы (2.33) непосредственно видно, что при увеличении амплитуды колебания маятника частота уменьшается, а период собственных колебаний

$$T_I = \frac{T_0}{1 - \frac{a^2}{16}} \approx T_0 \left( 1 + \frac{a^2}{16} \right) \quad (2.34)$$

увеличивается. (Здесь  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{g}}$ ).

Для построения решения во втором приближении воспользуемся формулами (2.23); тогда, учитывая в разложении для  $\sin x$  также член  $\frac{x^5}{5!}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= a \cos \phi - \frac{a^3}{192} \left( 1 + \frac{3}{64} a^2 \right) \cos 3\phi + \frac{a^5}{20480} \cos 5\phi, \\ \frac{\omega_{II}^2(a)}{\omega_0^2} &= 1 - \frac{a^2}{8} + \frac{3a^4}{512}, \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

откуда

$$\frac{\omega_{II}(a)}{\omega_0} \approx 1 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^4}{1024} \quad (2.36)$$

и

$$T_{II} = T_0 \left( 1 + \frac{a^2}{16} + \frac{3a^4}{1024} \right). \quad (2.37)$$

Для максимальных отклонений согласно (2.24) имеем:

$$x_{II \max} = a - \frac{a^3}{192} - \frac{a^5}{1024}. \quad (2.38)$$

При помощи полученных формул можно подсчитать частоты, периоды и максимальные отклонения для ряда значений  $a$  (амплитуды первой гармоники). Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

$x_{I \max} = a$	$x_{II \max}$	$\frac{\omega_I}{\omega_0}$	$\frac{\omega_{II}}{\omega_0}$	$\frac{T_I}{T_0}$	$\frac{T_{II}}{T_0}$
0,2	0,19996	0,99750	0,99750	1,00250	1,00250
0,4	0,39966	0,99000	0,99003	1,01000	1,01008
0,6	0,5988	0,97750	0,97763	1,02250	1,02288
0,8	0,7970	0,9600	0,96040	1,0400	1,04120
1,0	0,9938	0,9375	0,93848	1,0625	1,06543
1,2	1,1886	0,9100	0,91203	1,0900	1,09607
1,4	1,3805	0,8775	0,88125	1,1225	1,13376
1,6	1,5684	0,840	0,8464	1,160	1,1792
1,8	1,751	0,798	0,8078	1,203	1,2333
2,0	1,927	0,750	0,7656	1,250	1,2969
2,2	2,094	0,698	0,7204	1,303	1,3711
2,4	2,250	0,640	0,6724	1,360	1,4572
2,6	2,392	0,578	0,6221	1,423	1,5564
2,8	2,518	0,510	0,5700	1,490	1,6701
3,0	2,622	0,438	0,5166	1,563	1,7998

Сопоставляя табл. 2 с табл. 1, легко видеть, что для отклонений маятника, не превышающих  $\pm 35^\circ$  (в этих пределах частоты и максимальные отклонения совпадают с точными соответственно до 5-го и 4-го знака включительно), с успехом можно рассматривать уравнение (2.31) и соответствующие ему более простые приближенные решения (2.32) и (2.35) вместо точного уравнения (2.25). При больших же углах отклонения (порядка  $\pm 160^\circ$ ) относительная погрешность первого приближения составит 13%, а второго всего около 3%.

При рассмотрении свободных колебаний маятника мы не учитывали сил трения.

Если предположить, что колебания маятника затухают под воздействием сил, пропорциональных скорости, то приходим к исследованию следующего уравнения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (2.39)$$

или для небольших отклонений:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \left( x - \frac{x^3}{6} \right) = 0. \quad (2.40)$$

Согласно общим формулам § 1 в первом приближении решение уравнения (2.40) будет:

$$x = a \cos \phi, \quad (2.41)$$

где  $a$  и  $\phi$  должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\delta a, \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right); \end{cases} \quad (2.42)$$

здесь введены обозначения  $\delta = \frac{\lambda}{2m}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{lm}}$ .

Интегрируя первое уравнение системы (2.42) при начальных значениях  $t = 0$ ,  $a = a_0$ , находим:

$$a = a_0 e^{-\delta t}. \quad (2.43)$$

После этого из второго уравнения системы (2.42) получаем:

$$\phi = \omega \left\{ t + \frac{a_0^2}{32\delta} (e^{-2\delta t} - 1) \right\} + \theta, \quad (2.44)$$

где  $\theta$  — начальное значение фазы.

Подставляя значения амплитуды (2.43) и фазы (2.44) в формулу (2.41), получим первое приближение в виде

$$x = a_0 e^{-\delta t} \cos \left\{ \omega \left[ t + \frac{a_0^2}{32\delta} (e^{-2\delta t} - 1) \right] + \theta \right\}. \quad (2.45)$$

Таким образом, в первом приближении колебания будут затухающими, с частотой, зависящей от амплитуды  $\omega = \omega(a)$ , причем с увеличением времени вследствие постепенного затухания мгновенная частота будет увеличиваться, стремясь в пределе к постоянному «линейному» значению частоты  $\omega = \sqrt{\frac{g}{lm}}$ .

Рассмотрим теперь колебания системы, для которой характеристика восстанавливающей упругой силы имеет вид

$$p(x) = \alpha x + \gamma x^3 \quad (\alpha > 0, \gamma > 0). \quad (2.46)$$

В этом случае получаем нелинейное дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \gamma x^3 = 0, \quad (2.47)$$

которое может быть проинтегрировано в явной форме с помощью эллиптических функций. Следовательно, здесь можно также сопоставить приближенным решениям точные.

Так как для этого случая разложение (2.17) будет:

$$p(a \cos \psi) = \left( \alpha a + \frac{3}{4} \gamma a^3 \right) \cos \psi + \frac{\gamma a^5}{4} \cos 3\psi,$$

то, вводя безразмерные комбинации  $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x$ ,  $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$ ,  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , на основании (2.21) и (2.23) можем написать:  
в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_I &= \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a \cos \psi, \\ \left(\frac{\omega_I(a)}{\omega_0}\right)^2 &= 1 + \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a \right]^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}; \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{II} &= \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a \cos \psi + \frac{\left(a \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^3 \cos 3\psi}{32 \left(\frac{\omega_I}{\omega_0}\right)^2}, \\ \left(\frac{\omega_{II}(a)}{\omega_0}\right)^2 &= \left(\frac{\omega_I(a)}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3}{128} \frac{\left(a \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^4}{\left(\frac{\omega_I}{\omega_0}\right)^4} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

откуда имеем:

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{I \max} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a; \quad \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{II \max} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a \left\{ 1 + \frac{a^2 \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{32 \left(\frac{\omega_I}{\omega_0}\right)^2} \right\}. \quad (2.50)$$

Точные значения  $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\max}$  и  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для данных  $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$  найдем по таблицам эллиптических функций с помощью формул

$$x(\phi, a) = x_{\max} \operatorname{cn} \left\{ \frac{2K}{\pi} \phi \right\} = x_{\max} \frac{2\pi}{kK} \left\{ \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos \phi + \frac{q^{3/2}}{1+q^3} \cos 3\phi + \dots \right\}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\pi \sqrt{1+\xi^2}}{2K}, \quad k = \frac{\xi}{\sqrt{2+2\xi^2}}, \quad \xi = x_{\max} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Здесь  $\operatorname{cn}$ ,  $K$ ,  $q$  обозначают соответственно эллиптический косинус, модуль, полный эллиптический интеграл первого рода и  $e^{-\pi K'}$ , а  $K'(k) = K(k')$ , где  $k' = \sqrt{1-k^2}$ .

Результаты вычислений приводим в табл. 3.

Таблица 3

$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} a$	$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\text{IImax}}$	$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x_{\text{max}}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$ I	$\frac{\omega}{\omega_0}$ II	$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,29927	0,30005	0,3	1,0330	1,0331	1,0331
0,59464	0,5998	0,6	1,1248	1,1258	1,1259
0,88552	0,8992	0,9	1,2602	1,2638	1,2641
1,1733	1,1981	1,2	1,4256	1,4333	1,4340
1,4592	1,4966	1,5	1,6115	1,6241	1,6257
1,7443	1,7948	1,8	1,8116	1,8297	1,8323
2,0293	2,0931	2,1	2,022	2,0459	2,0493
2,3140	2,3912	2,4	2,240	2,2697	2,2740
2,5991	2,6895	2,7	2,463	2,4985	2,5041
2,8841	2,9877	3,0	2,690	2,7318	2,7385

Принимая во внимание простоту формул (2.48) и (2.49), следует, очевидно, признать получаемую в данном примере степень приближения вполне удовлетворительной. Можно, кроме того, показать, что эти формулы не теряют своей эффективности даже при  $a \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \rightarrow \infty$ .

В самом деле, соотношения (2.51) приводят к следующей асимптотической формуле:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1+q}{\sqrt{q}} a \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} + \dots,$$

где  $q$  берется для модуля  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , а точки обозначают член, отношение которого к написанному первому члену стремится к нулю при  $a \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \rightarrow \infty$ . Аналогичные асимптотические формулы получаются из (2.48) и (2.49) для  $\frac{\omega_I(a)}{\omega_0}$  и  $\frac{\omega_{II}(a)}{\omega_0}$  соответственно с коэффициентами пропорциональности  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{128} \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$ . Их численные значения будут:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1+q}{\sqrt{q}}\right)_{q=\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,887; \quad \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866; \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{128} \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) = 0,892.$$

Таким образом, в пределе при  $a \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} \rightarrow \infty$  относительная погрешность первого приближения частоты составит 2,4%, а второго — всего 0,6%.

### § 3. Случай нелинейного трения

В качестве второго частного случая рассмотрим уравнение вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon F \left(\frac{dx}{dt}\right), \quad (3.1)$$

которое можно интерпретировать как уравнение колебаний массы  $m$ ,

находящейся под воздействием линейной упругой силы  $kx$  и нелинейного слабого трения  $\varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right)$ , зависящего от скорости.

Это уравнение, очевидно, принадлежит к типу общего уравнения (1.1), причем здесь

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{m} F\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Чтобы воспользоваться формулами (1.21) – (1.28), определяющими искомые приближенные решения, рассмотрим разложение

$$\frac{1}{m} F(a \cos \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a) \cos n\phi, \quad (3.2)$$

из которого получим:

$$\frac{1}{m} F(-a\omega \sin \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega) \cos n\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Сопоставляя последнее разложение с (1.16), находим:

$$g_n(a) = F_n(a\omega) \cos \frac{n\pi}{2}, \quad h_n(a) = -F_n(a\omega) \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (3.3)$$

Поэтому согласно (1.17) имеем:

$$A_1(a) = \frac{1}{2\omega} F_1(a\omega), \quad B_1(a) = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, учитывая (1.23) и (1.24), получим первое приближение в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos \phi, \\ \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\omega} F_1(a\omega), \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Отсюда легко видеть, что для систем, описываемых уравнением типа (3.1), в первом приближении амплитуда колебания затухает согласно закону, выраженному вторым уравнением (3.5). Что касается мгновенной частоты, то она постоянна и равна обычной линейной частоте  $\omega$ , так что

$$\dot{\phi} = \omega t + \theta,$$

где  $\theta$  — начальное значение фазы  $\phi$ .

Таким образом, в первом приближении колебания оказываются гармоническими с постоянной частотой  $\omega$ .

Мы уже имели возможность убедиться в том, что нелинейные колебательные системы, вообще говоря, не изохронны.

Рассматриваемый же пример является одним из важных случаев, когда в первом приближении система изохронна. Такие случаи будем называть случаями квазизохронности \*).

\*.) Мы прибавляем «квази» потому, что соответствующие колебательные системы, как показано ниже, будут изохронны лишь в первом приближении.

Перейдем к построению второго приближения. Согласно (1.28) и (3.3) находим:

$$u_1(a, \psi) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{F_n(a\omega) \cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}. \quad (3.6)$$

Далее из (1.30), (3.4) и (3.6) получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{A_1(a)}{2\omega\pi m} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi - \\ &\quad - \frac{1}{2\omega^2\pi m} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{nF_n(a\omega)}{n^2 - 1} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \cdot \sin n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \psi d\psi, \\ B_2(a) &= \frac{1}{2\omega} \frac{A_1(a)}{a} \frac{dA_1(a)}{da} - \frac{A_1(a)}{2\omega\pi am} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \times \\ &\quad \times \cos^2 \psi d\psi - \frac{1}{2\omega^2\pi am} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{nF_n(a\omega)}{n^2 - 1} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \sin n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

С другой стороны, заменяя в интегралах  $\psi$  на  $\psi - \frac{\pi}{2}$ , находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \sin n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \psi d\psi &= \\ &= - \int_0^{2\pi} F'(a\omega \cos \psi) \sin n\psi \cos \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Далее, интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} F'(-a\omega \sin \psi) \sin n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \cos \psi d\psi &= \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} F'(a\omega \cos \psi) \sin n\psi \sin \psi d\psi = - \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \sin n\psi d \left[ \frac{F(a\omega \cos \psi)}{a\omega} \right] = \\ &= -\frac{n}{a\omega m} \int_0^{2\pi} F(a\omega \cos \psi) \cos n\psi d\psi = \frac{n\pi}{a\omega} F_n(a\omega). \end{aligned}$$

Поэтому (3.7) можно записать следующим образом:

$$A_2(a) = 0,$$

$$B_2(a) = \frac{F_1(a\omega)}{8\omega^3 a} \frac{dF_1(a\omega)}{da} - \frac{F_1^2(a\omega)}{4\omega^3 a^2} - \frac{1}{2\omega^3 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^2(a\omega)}{n^2 - 1}. \quad (3.8)$$

Итак, в рассматриваемом случае второе приближение имеет вид

$$x = a \cos \psi - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq 1)}}^{\infty} \frac{F_n(a\omega) \cos n\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}, \quad (3.9)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon F_1(a\omega)}{2\omega}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 B_2(a), \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

где  $B_2(a)$  определяется выражением (3.8).

Прежде чем перейти к анализу уравнений зависимости амплитуды от времени для различных законов силы трения, т. е. для различных видов функции  $F\left(\frac{dx}{dt}\right)$ , заметим, что для применимости выведенных формул необходимо общее ограничение, а именно: сила трения должна быть достаточно малой.

Переходя к анализу конкретных примеров, прежде всего рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (3.11)$$

с малым коэффициентом затухания:

$$\lambda = \varepsilon \omega.$$

Для данного уравнения

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\nu \frac{dx}{dt},$$

и потому

$$\begin{aligned} F_1(a\omega) &= -\nu \omega a, \\ F_n(a\omega) &= 0 \quad (n = 0, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (3.8), (3.9) и (3.10) получим сразу во втором приближении:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \psi, \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda a}{2}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Как видно из первого уравнения (3.12), для закона затухания амплитуды получается полное совпадение с точной формулой

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}},$$

а для частоты колебаний имеем приближенную формулу

$$\omega_2 = \omega \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda}{\omega} \right)^2 \right\}, \quad (3.13)$$

которая соответствует двум первым слагаемым в разложении точного

выражения для частоты

$$\omega \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\lambda}{\omega} \right)^2} = \omega \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{128} \left( \frac{\lambda}{\omega} \right)^4 + \dots \right\}$$

по степеням  $\frac{\lambda}{\omega}$ , что, впрочем, совершенно естественно, так как мы не учитываем членов выше второго порядка малости.

Чтобы составить себе представление о степени точности полученной приближенной формулы (3.13), возьмем, например,  $\frac{\lambda}{\omega} = \frac{\ln 2}{\pi}$ . Заметим, что это значение коэффициента  $\lambda$  соответствует весьма значительному затуханию. Так за один период амплитуда колебаний уменьшается в два раза. По абсолютной величине «возмущающий член»  $\lambda \frac{dx}{dt}$  достигает еще примерно  $1/4$  «главных членов»:  $\frac{d^2x}{dt^2}$  или  $\omega^2 x$ . Несмотря на это, относительная погрешность формулы (3.13) оказывается меньше чем 0,01%.

Рассмотрим еще один простой пример, приводящий к уравнению типа (3.1): гармонические или вообще малые колебания маятника в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости и мало.

В этом случае уравнение колебаний будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x &= 0, \text{ если } \frac{dx}{dt} > 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x &= 0, \text{ если } \frac{dx}{dt} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + \omega^2 x = 0, \quad (3.15)$$

где, как всегда,  $\left| \frac{dx}{dt} \right|$  обозначает абсолютную величину  $\frac{dx}{dt}$ . (Мы прибегаем к такой записи, чтобы отметить, что член  $\alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  представляет собой сопротивление движению.)

Считая затухание достаточно слабым, положим

$$\alpha = \varepsilon \nu.$$

Тогда уравнение (3.15) будет уравнением вида (3.1), причем

$$F \left( \frac{dx}{dt} \right) = - \nu \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right|.$$

Находим выражение  $n$ -го члена в разложении Фурье для  $F(a \cos \phi)$ :

$$\begin{aligned} F_n(a) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(a \cos \phi) \cos n\phi d\phi = - \frac{2\nu a^2}{\pi} \int_0^\pi |\cos \phi| \cos \phi \cos n\phi d\phi = \\ &= - \frac{2\nu a^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \cos n\phi d\phi - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^2 \phi \cos n\phi d\phi \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$F_0(a) = F_2(a) = F_4(a) = \dots = F_{2q}(a) = \dots = 0,$$

$$F_1(a) = -\frac{8\alpha a^2}{3\pi}, \quad F_{2q+1}(a) = \frac{8\alpha a^2 (-1)^{q+1}}{\pi (2q+1) [(2q+1)^2 - 4]} \\ (q = 0, 1, 2, \dots).$$

Таким образом, согласно (3.8), (3.9) и (3.10) второе приближение можем написать в виде

$$x = a \cos \psi - \frac{8\alpha a^2}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\sin(2q+1)\psi}{(2q+1)[(2q+1)^2 - 1][(2q+1)^2 - 4]} = \\ = a \cos \psi - \frac{\alpha a^2}{15\pi} \left\{ \sin 3\psi + \frac{1}{24} \sin 5\psi + \dots \right\}, \quad (3.16)$$

где  $a$  и  $\psi$  определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{4\alpha\omega}{3\pi} a^2, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega \left\{ 1 - \frac{4\alpha^2 a^2}{\pi^2} C \right\}; \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.17)$$

здесь для сокращения обозначено:

$$C = 8 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{[(2q+1)^2 - 1][(2q+1)^2 - 4]^2} = \\ = \frac{1}{25} + \frac{1}{1323} + \frac{1}{12\,150} + \dots = 0,0407\dots \quad (3.18)$$

Интегрируя первое уравнение (3.17), имеем:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{4\alpha\omega}{3\pi} t, \quad (3.19)$$

откуда находим закон затухания амплитуды основной гармоники колебания:

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{4\alpha\omega a_0}{3\pi} t}. \quad (3.20)$$

Таким образом, амплитуда колебаний при квадратичном законе затухания затухает приблизительно обратно пропорционально увеличению линейной функции времени.

Подставив выражение (3.20) во второе из уравнений (3.17) и интегрируя, получим закон вращения фазового угла:

$$\psi = \omega t - \frac{3C\alpha a_0}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{4\alpha\omega a_0}{3\pi} t} \right\} + \phi_0. \quad (3.21)$$

Итак, имеем явные выражения для представления колебательного процесса во втором приближении.

Заметим, что поправочные члены второго приближения весьма малы даже при значительном затухании. Так, если взять  $\alpha a_0 = \frac{3}{8}$ , т. е. рассматривать случай, в котором амплитуда  $a$  через один цикл после начала колебаний уменьшается в два раза, то сумма амплитуд всех

обертона колебания будет составлять менее 1% от амплитуды главной гармоники, а поправка второго приближения для частоты колебаний будет менее 0,25%.

Сопоставим теперь полученное приближенное решение с точным.

Уравнение (3.15) может быть проинтегрировано до конца. Действительно, полагая при  $t = 0$ ,  $x = x_0 > 0$ ,  $\frac{dx}{dt} = 0$ , находим:

$$\int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(1+2ax)-(1+2ax_0)e^{-2a(x-x_0)}}} = \frac{\omega}{\sqrt{2a}} t. \quad (3.22)$$

Ввиду того, что правая часть является трансцендентной квадратурой, искомую функцию  $x$  нельзя представить с помощью элементарных функций. Однако нетрудно установить уравнение для двух последовательных амплитуд, затухающих из-за наличия трения, пропорционального квадрату скорости. Следуя F. Prásil'ю\*), имеем:

$$(2ax_1 + 1) - \ln(2ax_1 + 1) = (2ax_0 + 1) - \ln(2ax_0 + 1), \quad (3.23)$$

или в наших обозначениях

$$(2aa_0 + 1) - \ln(2aa_0 + 1) = (2aa_1 + 1) - \ln(2aa_1 + 1), \quad (3.24)$$

где  $a_0$  — начальное значение амплитуды,  $a_1$  — значение амплитуды по истечении одного периода колебания.

Для того чтобы сравнить результаты, полученные по точной формуле (3.24) и приближенной (3.19), преобразуем формулу (3.19). Очевидно, ее можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2aa} - \frac{1}{2aa_0} = \frac{2\omega}{3\pi} t. \quad (3.25)$$

Подставляя в правую часть значение периода в первом приближении, получим следующее соотношение, связывающее между собой две последовательные амплитуды\*\*):

$$\frac{1}{2aa_1} - \frac{1}{2aa_0} = \frac{4}{3}. \quad (3.26)$$

Приводимая ниже табл. 4 показывает хорошее совпадение последовательных амплитуд, рассчитанных по точной формуле (3.24) и приближенной. Для  $2aa_0 = 1$ , т. е. в случае, когда амплитуда через полуцикл уменьшится до 0,6 своего значения, результаты по формуле (3.26) (которая характеризует только первое приближение) отличаются от точных результатов по формуле (3.24) только на 1%; для случая же  $2aa_0 = 0,1$  — на 0,4%.

Рассмотрим еще один пример, приводящий к уравнению типа (3.1): колебания тела, находящегося под воздействием кулоновского трения.

В этом случае приходим к расмотрению уравнения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = -A \operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad (3.27)$$

\*) F. Prásil, Schweiz. Bauz. 52, 334 (1908).

\*\*) Заметим, что такую же приближенную формулу эмпирически нашел A. de Caligny, Recherches sur les oscillations de l'eau, 1 Versailles, p. 20.

Таблица 4

$(2\alpha a)_{\text{точ}}$	$(2\alpha a)_{\text{пр}}$	$(2\alpha a)_{\text{точ}}$	$(2\alpha a)_{\text{пр}}$	$(2\alpha a)_{\text{точ}}$	$(2\alpha a)_{\text{пр}}$
1,0000	1,0000	0,4570	0,1578	0,0854	0,0856
0,5936	0,6000	0,1420	0,1428	0,0808	0,0840
0,4240	0,4285	0,1298	0,1304	0,0767	0,0769
0,3301	0,3332	0,1194	0,1200	0,0730	0,0731
0,2704	0,2726	0,1106	0,1111	—	—
0,2290	0,2307	0,1030	0,1034	—	—
0,1986	0,1999	0,0964	0,0967	—	—
0,1753	0,1764	0,0906	0,0908	—	—

где

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{dx}{dt} > 0, \\ -1, & \text{если } \frac{dx}{dt} < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Сопоставляя уравнение (3.27) с (3.1), имеем:

$$\frac{e}{m} F\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{A}{m} \operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right). \quad (3.29)$$

Следовательно, при  $a > 0$  получаем:

$$\begin{aligned} e \int_0^{2\pi} F(a \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ &= -A \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \psi d\psi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \psi d\psi \right\} = -4A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = -4A. \end{aligned}$$

Далее, при  $a = 0$ 

$$e \int_0^{2\pi} F(a \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi = 0.$$

Поэтому согласно (3.5) в первом приближении для мгновенной амплитуды можем написать уравнения:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{2A}{\pi m \omega}, & \text{если } a > 0; \\ \frac{da}{dt} = 0, & \text{если } a = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Интегрируя уравнение (3.30) при начальных значениях  $t = 0$ ,  $a = a_0$ , находим:

$$\begin{cases} a = a_0 - \frac{2A}{\pi m \omega} t & \text{при } t \leq \frac{\pi m \omega}{2A} a_0; \\ a = 0 & \text{при } t > \frac{\pi m \omega}{2A} a_0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Согласно (3.31) очевидно, что при кулоновском трении колебания совершенно затухнут, начиная с момента времени  $t = \bar{t}$ , где

$$\bar{t} = \frac{\pi m \omega}{2A} a_0.$$

#### § 4. Автоколебательные системы

Рассмотрим еще колебательную систему, описываемую уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt}, \quad (4.1)$$

которое также является частным случаем уравнения (1.1).

Заметим, что ранее рассмотренное уравнение (3.1) может быть приведено к виду (4.1).

В самом деле, полагая

$$\frac{dx}{dt} = y$$

и дифференцируя уравнение (3.1), получаем:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = \varepsilon F'(y) \frac{dy}{dt}.$$

Сопоставляя уравнение (4.1) с (1.1), имеем:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \frac{dx}{dt};$$

поэтому, для того чтобы воспользоваться формулами (1.21) — (1.28), необходимо разложить в ряд Фурье выражение

$$f(a \cos \phi) a \omega \sin \phi.$$

Для упрощения этой операции рассмотрим функцию

$$F^*(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (4.2)$$

и разложение в ряд Фурье:

$$F^*(a \cos \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \cos n\phi. \quad (4.3)$$

Дифференцируя (4.3) по  $\phi$ , на основании (4.2) получим:

$$f(a \cos \phi) a \omega \sin \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \omega n F_n^*(a) \sin n\phi. \quad (4.4)$$

Сопоставляя (4.4) с (1.16) и (1.17), находим:

$$A_1(a) = \frac{1}{2} F_1^*(a), \quad B_1(a) = 0, \quad (4.5)$$

откуда в первом приближении имеем:

$$x = a \cos \phi,$$

где  $a$  и  $\phi$  должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Для построения второго приближения можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

Исходя из выражений (3.2), (3.6), (3.7), (3.8) и (4.4) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(a \cos \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(a \cos \psi) \cos^2 \psi d\psi &= \frac{dF_1^*(a)}{da}, \end{aligned}$$

можем написать:

$$x = a \cos \psi + \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n\psi}{n^2 - 1}, \quad (4.7)$$

где  $a$  и  $\psi$  определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 B_2(a), \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

а  $B_2(a)$  имеет следующий вид:

$$B_2(a) = -\frac{1}{8\omega} F_1^*(a) \frac{dF_1^*(a)}{da} - \frac{1}{2\omega a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^{*2}(a)}{n^2 - 1}. \quad (4.9)$$

Сопоставляя полученные приближенные решения с решениями уравнения (3.1), найденными в предыдущем параграфе, убеждаемся в их полной идентичности.

Таким образом, система, описываемая уравнением (4.1), также является квазизохронной.

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (4.10)$$

Сопоставляя (4.10) и (4.1), имеем:

$$f(x) = 1 - x^2,$$

и потому

$$F^*(x) = x - \frac{x^3}{3},$$

после чего находим разложение (4.3) для нашего случая:

$$F^*(a \cos \psi) = a \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) \cos \psi - \frac{a^3}{12} \cos 3\psi,$$

согласно которому получим:

$$\left. \begin{array}{l} F_1^*(a) = a \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right), \\ F_3^*(a) = -\frac{a^3}{12}, \\ F_n^*(a) = 0, \text{ если } n \neq 1, n \neq 3. \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

Таким образом, учитывая (4.6), в первом приближении имеем:

$$x = a \cos \phi, \quad (4.12)$$

где  $a$  и  $\phi$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right), \\ \frac{d\phi}{dt} = 1. \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

Итак, в первом приближении получаем гармоническое колебание, обладающее постоянной частотой  $\omega = 1$ , амплитуда которого изменяется в соответствии с первым дифференциальным уравнением системы (4.13). Чтобы найти в явном виде закон зависимости амплитуды колебания от времени, необходимо решить это уравнение. Умножая обе его части на  $a$ , имеем:

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) a^2, \quad (4.14)$$

откуда

$$\frac{da^2}{\left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) a^2} = \varepsilon dt,$$

или

$$\frac{da^2}{4-a^2} + \frac{da^2}{a^2} = \varepsilon dt,$$

что дает

$$\ln \frac{a^2}{4-a^2} = \ln \frac{a_0^2}{4-a_0^2} + \varepsilon t, \quad (4.15)$$

где  $a_0$  — начальное значение амплитуды.

Из (4.15) окончательно находим:

$$a = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2} \varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}}. \quad (4.16)$$

Подставив (4.16) в (4.12), имеем выражение для первого приближения в явном виде:

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2} \varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \cos(\omega t + \theta). \quad (4.17)$$

Как видно из (4.17), если начальное значение амплитуды  $a_0$  равно нулю, то амплитуда останется равной нулю для любого  $t$ , и мы полу-

чим  $x = 0$ , т. е. тривиальное решение уравнения Ван-дер-Поля. Это тривиальное решение, очевидно, соответствует статическому режиму, т. е. отсутствию колебаний в системе.

Однако, исходя из этой же формулы, нетрудно заключить, что этот статический режим неустойчив. Действительно, как бы мало ни было начальное значение амплитуды, оно все равно будет монотонно возрастать, приближаясь к предельному значению, равному 2. Таким образом, поскольку случайные малые толчки практически неизбежны, в рассматриваемой колебательной системе, находящейся в состоянии покоя, автоматически возбуждаются колебания с нарастающей амплитудой, т. е. система самовозбуждается.

Из (4.17) также замечаем, что если  $a_0 = 2$ , то  $a = 2$  для любых  $t \geq 0$ . Это решение соответствует стационарному (установившемуся) динамическому режиму:

$$x = 2 \cos(t + \theta). \quad (4.18)$$

В отличие от статического динамический режим обладает сильной устойчивостью, заключающейся в том, что каково бы ни было значение  $a_0 \neq 0$ , малое или большое, все равно  $a(t) \rightarrow 2$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Иначе говоря, любое колебание при увеличении  $t$  приближается к стационарному колебанию (4.18).

Заметим, что только в первом приближении можно представить стационарный режим (4.18) как гармоническое колебание с частотой  $\omega = 1$  и амплитудой, равной 2. В действительности же стационарный режим не гармонический.

Перейдем теперь к построению второго приближения. Согласно (4.7), (4.8) и (4.11) находим:

$$x = a \cos \phi - \frac{\epsilon a^3}{32} \sin 3\phi, \quad (4.19)$$

где  $a$  и  $\phi$  должны быть определены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\epsilon a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1 - \epsilon^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Для стационарных колебаний во втором приближении получим:

$$x = 2 \cos(\omega t + \theta) - \frac{\epsilon}{4} \sin 3(\omega t + \theta), \quad (4.21)$$

причем

$$\omega = 1 - \frac{\epsilon^2}{16}.$$

На рассмотренном нами простом примере колебательной самовозбуждающейся системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля, замечаем коренное отличие этой системы от колебательных консервативных систем, описываемых уравнением вида (2.1).

Именно в консервативных колебательных системах, как мы видели (см. стр. 51), возможны колебания с любой постоянной амплитудой, в автоколебательных же системах колебания с постоянной амплитудой возможны лишь при некотором определенном ее значении. Физически это ясно из следующего очевидного соображения. Поскольку в

консервативной системе нет ни рассеяния, ни источника энергии, то раз возбудившиеся колебания не могут ни возрастать, ни затухать, и их амплитуда остается равной ее начальному значению.

В самовозбуждающихся системах имеется рассеяние энергии и ее источник. Поэтому амплитуда колебаний будет возрастать, если количество энергии, доставляемой источником, превышает количество энергии, рассеиваемой диссипативными силами. Наоборот, если количество энергии, доставляемой источником, меньше количества рассеиваемой энергии, колебания будут затухать.

Постоянное же значение амплитуды будет сохранять только в том случае, когда оба упомянутые количества энергии точно уравновешивают друг друга.

Построим теперь приближенные решения для уравнения Ван-дер-Поля, воспользовавшись принципом усреднения.

Для этого необходимо уравнение (4.10) привести к стандартной форме. Это легко сделать, если вместо неизвестной функции  $x$  ввести две новые функции  $a$  и  $\theta$  посредством следующих формул замены переменных:

$$x = a \cos(t + \theta), \quad (4.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin(t + \theta). \quad (4.23)$$

Дифференцируя (4.22) и сравнивая с (4.23), получаем:

$$\frac{da}{dt} \cos(t + \theta) - a \frac{d\theta}{dt} \sin(t + \theta) = 0. \quad (4.24)$$

Дифференцируя (4.23) и принимая во внимание (4.22), (4.10), имеем:

$$\frac{da}{dt} \sin(t + \theta) + a \frac{d\theta}{dt} \cos(t + \theta) = \varepsilon [1 - a^2 \cos^2(t + \theta)] a \sin(t + \theta). \quad (4.25)$$

Разрешив соотношения (4.24), (4.25) относительно производных, приходим к системе двух уравнений в стандартной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon [1 - a^2 \cos^2(t + \theta)] a \sin^2(t + \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon [1 - a^2 \cos^2(t + \theta)] \sin(t + \theta) \cos(t + \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t + \theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \theta) \right\}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) \sin 2(t + \theta) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t + \theta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Применяя принцип усреднения, получаем в первом приближении

$$a = a_1, \quad \theta = \theta_1,$$

причем

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2} \left( 1 - \frac{a_1^2}{4} \right), \quad \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad (4.28)$$

так как

$$\int_t M \{ \cos 2(t + \theta) \} dt = \int_t M \{ \sin 2(t + \theta) \} dt = \int_t M \{ \cos 4(t + \theta) \} dt = \int_t M \{ \sin 4(t + \theta) \} dt = 0.$$

Как видно, уравнения первого приближения (4.28) совпадают с полученными выше уравнениями (4.13).

Улучшенное первое приближение, очевидно, будет:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 - \frac{\varepsilon a_1}{4} \sin 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon a_1^3}{32} \sin 4(t + \theta_1), \\ \theta &= \theta_1 - \frac{\varepsilon}{4} \left( 1 - \frac{a_1^2}{2} \right) \cos 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon a_1^2}{32} \cos 4(t + \theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Для стационарного режима, как и выше, имеем:

$$a(t) \rightarrow 2 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, для установившегося колебательного режима при  $a_1 = 2$  формулы (4.29) улучшенного первого приближения дают:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(t + \theta_1), \\ \theta &= \theta_1 + \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(t + \theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Подставляя эти значения в (4.22), получим:

$$x = \left[ 2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(t + \theta_1) \right] \cos \left( t + \theta_1 + \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(t + \theta_1) + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(t + \theta_1) \right), \quad (4.31)$$

или, пренебрегая членами второго порядка малости, после элементарных преобразований получаем улучшенное приближение

$$x = 2 \cos(t + \theta_1) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(t + \theta_1), \quad (4.32)$$

которое совпадает с выражением улучшенного приближения, найденным нами ранее.

Прежде чем перейти к специальному рассмотрению стационарных амплитуд и их устойчивости, рассмотрим еще один классический пример автоколебательной системы — колебания часовового маятника, возбуждаемого импульсами.

В этом случае имеем уравнение

$$J \frac{d^2x}{dt^2} + \left\{ \lambda \frac{dx}{dt} - I \frac{\frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right|}{2} \delta(x - x_0) \right\} + kx = 0, \quad (4.33)$$

где  $x_0$  — значение угла отклонения маятника, при котором на маятник посыпается импульс  $I$ ,  $\delta(x)$  — «несобственная функция», определяемая соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-0}^{+0} \delta(x) dx &= 1, \\ \delta(x) &= 0 \quad \text{при } x \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Чтобы привести уравнение (4.33) к виду (1.1), полагаем

$$\omega^2 = \frac{k}{J},$$

$$\varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\lambda}{J} \frac{dx}{dt} - I \frac{\frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right|}{2} \delta(x - x_0). \quad (4.35)$$

На основании (4.34) и (4.35) можем написать:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi &= \frac{1}{J} \int_0^{2\pi} \lambda a \omega \sin^2 \psi d\psi - \\ &- \frac{I a \omega}{J} \int_0^{2\pi} \delta(a \cos \psi - x_0) \frac{\sin \psi + |\sin \psi|}{2} \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{\lambda a \omega \pi}{J} - \frac{I a \omega}{J} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Пусть  $\psi_a$  является корнем уравнения

$$a \cos \psi = x_0, \quad (4.37)$$

лежащим между  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$ .

Тогда для  $a \geq x_0$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi &= \int_{\psi_a - 0}^{\psi_a + 0} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi = \\ &= \frac{1}{a} \int_{x_0 - 0}^{x_0 + 0} \delta(x - x_0) \sin \psi_a dx = \frac{\sin \psi_a}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}. \end{aligned}$$

Если же  $a < x_0$ , то, очевидно,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \cos \psi - x_0) \sin^2 \psi d\psi = 0.$$

Таким образом, на основании (4.36), (1.24) и (1.27) получаем уравнения для определения мгновенной амплитуды в первом приближении

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2J} a, \quad \text{если } a < x_0; \\ \frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2J} a + \frac{I}{2\pi J} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}, \quad \text{если } a \geq x_0, \end{array} \right\} \quad (4.38)$$

и совершенно аналогично уравнение для полной фазы

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a),$$

где

$$\omega(a) = \begin{cases} \omega, & \text{если } a < x_0; \\ \omega - \frac{Ix_0}{2\pi Ja^2}, & \text{если } a \geq x_0. \end{cases}$$

Из уравнения (4.38) следует, очевидно, что при достаточно малом начальном значении амплитуды  $a_0$ , например при

$$a \leq x_0,$$

амплитуда  $a(t)$  будет убывать:

$$a(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

и колебания с течением времени затухнут.

Данная колебательная система не имеет, следовательно, самовозбуждения, и статический режим (равновесие)

$$a = 0$$

является устойчивым.

Однако мы можем поставить вопрос о существовании стационарных (установившихся) динамических режимов, соответствующих постоянным, не равным нулю значениям амплитуды. Очевидно, что такие значения амплитуды  $a$  должны удовлетворять уравнению

$$-\frac{\lambda}{2J}a + \frac{I}{2\pi J} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = 0, \quad (4.39)$$

так как для стационарных амплитуд  $\frac{da}{dt} = 0$ .

Таким образом, вопрос о существовании стационарных динамических режимов связан с вопросом о существовании вещественных положительных корней у уравнения стационарных амплитуд (4.39). Рассмотрим это уравнение.

Переписывая его в форме

$$1 - \frac{x_0^2}{a^2} = \left(\frac{\pi\lambda}{I}\right)^2 a^2,$$

получим биквадратное уравнение для  $a$ :

$$a^4 - \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 a^2 + \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 x_0^2 = 0,$$

из которого находим два корня:

$$a_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2}; \quad (4.40)$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2}. \quad (4.41)$$

Корни эти будут вещественны, если

$$x_0 < \frac{1}{2} \frac{I}{\pi\lambda}. \quad (4.42)$$

Если

$$x_0 > \frac{1}{2} \frac{I}{\pi\lambda}, \quad (4.43)$$

то оба корня (4.40) и (4.41) будут комплексными, и поэтому в случае (4.43) стационарные динамические режимы невозможны. В этом случае единственным возможным стационарным режимом может быть положение равновесия  $a = 0$ .

Итак, при выполнении условия (4.43) колебания в рассматриваемой колебательной системе поддерживаться не могут. Независимо от своего начального значения амплитуда монотонно убывает, стремясь к нулю, и колебания со временем затухают.

При выполнении условия (4.42), как это следует из (4.38), процесс изменения амплитуды будет происходить следующим образом:

$$\text{если } a(0) < a_1, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0;$$

$$\text{если } a(0) > a_1, \text{ то } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = a_2,$$

причем если  $a(0) > a_2$ , то амплитуда монотонно убывает до значения  $a_2$ , а если  $a_1 < a(0) < a_2$ , то амплитуда монотонно возрастает, стремясь к тому же значению  $a_2$ .

Итак, если параметры колебательной системы удовлетворяют условию (4.42), в системе возможно устойчивое стационарное колебание с постоянной амплитудой:

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2}},$$

но для того, чтобы возбудить это колебание, необходимо, чтобы начальная амплитуда колебаний была больше  $a_1$ , т. е. необходим достаточно сильный начальный толчок, который создал бы отклонение маятника, превышающее  $a_1$ .

Например, если начальные условия при  $t = 0$  будут

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = A,$$

то мы видим, что

$$\psi_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad A = a_0\omega$$

и, следовательно, условие возбуждения колебаний будет

$$A > a_1\omega.$$

### § 5. Стационарные амплитуды и их устойчивость

В предыдущих параграфах были получены приближенные уравнения, определяющие закон изменения со временем амплитуды главной гармоники колебания.

Для любого  $n$ -го приближения полученное уравнение имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \Phi(a), \tag{5.1}$$

где

$$\Phi(a) = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^n A_n(a),$$

и потому может быть проинтегрировано в квадратурах.

Однако, и не производя интегрирования, можно исследовать поведение решения  $a = a(t)$  в зависимости от свойств  $\Phi(a)$ , чем сейчас и будем заниматься.

Допустим прежде всего, что не существует положительной величины  $a^*$ , для которой

$$\Phi(a) > 0 \text{ для всех } a > a^*.$$

Условие это, очевидно, необходимо принять и из чисто физических соображений.

Действительно, если бы такое значение  $a^*$  существовало, то, взяв начальное значение амплитуды большим  $a^*$ :

$$a(0) > a^*,$$

получили бы в соответствии с уравнением (5.1) неограниченное возрастание амплитуды

$$a(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

т. е. неограниченное раскачивание колебаний, что, очевидно, физически невозможно.

Поэтому в дальнейшем всегда будем предполагать, что это условие (которое можно назвать условием ограниченности амплитуд) выполнено.

Из уравнения (5.1) выводим, что амплитуда увеличивается, когда  $\Phi(a) > 0$ , и уменьшается, когда  $\Phi(a) < 0$ .

Неизменяющиеся, стационарные значения  $a$  определяются уравнением

$$\Phi(a) = 0, \quad (5.2)$$

для получения которого необходимо приравнять нулю правую часть уравнения (5.1).

Из уравнения (5.1) видим, что если начальное значение амплитуды не стационарно (не удовлетворяет уравнению (5.2)), то с возрастанием времени амплитуда  $a(t)$ , монотонно возрастающая (если  $\Phi(a^0) > 0$ ) или убывающая (если  $\Phi(a^0) < 0$ ), стремится к стационарному значению.

Итак, всякое нестационарное колебание с течением времени приближается к стационарному. Нестационарные колебания называются обычно неустановившимися колебаниями или колебаниями в переходном режиме. Факт приближения всякого колебания к стационарному выявляет особую роль стационарных колебаний, в особенности для высокочастотных колебательных процессов, для которых ввиду малости их периода колебаний переходной режим очень быстро приближается к стационарному. Поэтому колебания такого рода почти тотчас после начала колебательного процесса можно рассматривать практически как стационарные.

Заметим, что существует случай вырождения, когда функция  $\Phi(a)$  тождественно равна нулю. В этом случае переходных режимов нет и всякое колебание является стационарным. Этот случай имеет место, например, когда  $f(x, \frac{dx}{dt})$  зависит только от  $x$  и не зависит от  $\frac{dx}{dt}$ . Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0, \quad (5.3)$$

подробно рассмотренный нами выше.

Это уравнение можно интерпретировать как уравнение колебаний материальной точки, находящейся под действием силы  $F(x)$ , зависящей лишь от положения и потому равной  $\frac{dU}{dx}$ ,

где потенциал

$$U = \int_0^x F(x) dx.$$

Уравнение (5.3) является уравнением консервативной колебательной системы, энергия которой не меняется в течение колебаний.

Практически, однако, никакая обычная колебательная система не является консервативной, и в ней всегда имеются диссипативные силы, вызывающие рассеяние энергии, а также, если речь идет об автоколебательной системе, могут находиться и источники энергии.

Перейдем теперь к вопросу устойчивости стационарных колебаний.

Допустим, что  $a_0$  — некоторый корень уравнения (5.2), т. е. постоянное, стационарное решение уравнения (5.1). Рассмотрим бесконечно близкие к  $a_0$  решения уравнения (5.1). Полагая

$$a = a_0 + \delta a,$$

для бесконечно малого приращения  $\delta a$  получим (пренебрегаем членами высшего порядка малости):

$$\frac{d \delta a}{dt} = \Phi'(a_0) \delta a,$$

что дает:

$$\delta a = (\delta a)_0 e^{\Phi'(a_0) t}.$$

Таким образом, мы видим, что рассматриваемое значение амплитуды является устойчивым, т. е. соответствует устойчивому стационарному колебанию, если

$$\Phi'(a_0) < 0, \quad (5.4)$$

в противном случае, когда

$$\Phi'(a_0) > 0,$$

соответствующее стационарное колебание является, очевидно, неустойчивым.

В частности, так как значение  $a_0 = 0$ , соответствующее состоянию равновесия (статическому режиму), всегда является корнем уравнения (5.2) (благодаря формуле (1.33)), неравенство

$$\Phi'(0) > 0$$

будет представлять условие самовозбуждения колебаний.

Записав его в раскрытой форме:

$$\epsilon A'_1(0) + \epsilon^2 A'_2(0) + \dots + \epsilon^n A'_n(0) > 0,$$

и оставляя в стороне случай, когда функция  $A_1(a)$  может иметь кратные корни, мы видим, что при достаточно малых  $\epsilon$  (что, впрочем, всегда явно или неявно предполагается) вопрос о самовозбуждении решается знаком одного члена, именно  $\epsilon A'_1(0)$ , т. е. так же, как если бы мы имели дело с уравнением первого приближения.

Далее, в соответствии с (5.2) стационарные амплитуды должны удовлетворять уравнению

$$A_1(a) + \epsilon A_2(a) + \dots + \epsilon^{n-1} A_n(a) = 0.$$

Поэтому, оставляя в стороне вышеупомянутые случаи кратных корней, можем разложить  $a$  в ряд по степеням параметра  $\epsilon$ :

$$a = a^{(0)} + \epsilon a^{(1)} + \epsilon^2 a^{(2)} + \dots, \quad (5.5)$$

где  $a^{(0)}$  — корень уравнения  $A_1(a) = 0$  (стационарная амплитуда в первом приближении),

$$a^{(1)} = -\frac{A_2(a^{(0)})}{A'_1(a^{(0)})}, \dots$$

Так как данный стационарный режим будет устойчивым или неустойчивым, если соответственно

$$\varepsilon A'_1(a) + \varepsilon^2 A'_2(a) + \dots + \varepsilon^n A'_n(a) \leq 0,$$

и так как вследствие соотношения

$$\varepsilon A'_1(a) + \varepsilon^2 A'_2(a) + \dots + \varepsilon^n A'_n(a) = \varepsilon A'_1(a^{(0)}) + \varepsilon^2 \dots ,$$

вытекающего из (5.5), знак его левой части определяется при достаточно малом  $\varepsilon$  знаком  $\varepsilon A'_1(a^{(0)})$ , видим, что вопрос об устойчивости стационар-

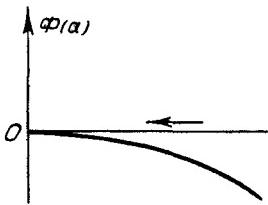


Рис. 25.

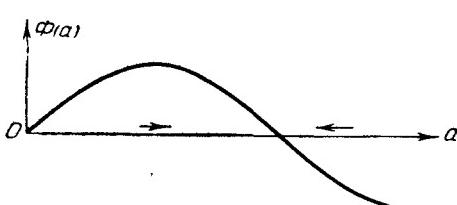


Рис. 26.

ных колебаний решается при достаточно малых  $\varepsilon$  в зависимости от знака  $\varepsilon A'_1(a^{(0)})$ , т. е. так, как если бы имели дело с уравнением первого приближения.

Вообще следует подчеркнуть, что, за исключением некоторых особых случаев, уравнения первого приближения приводят к тем же качественным результатам, что и уравнения высших приближений. Переход

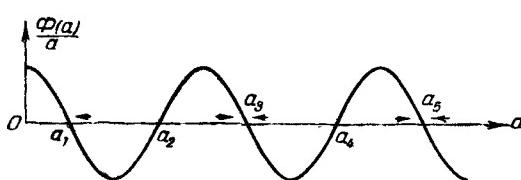


Рис. 27.

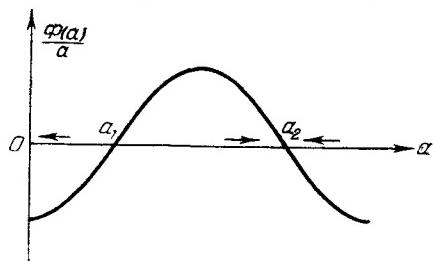


Рис. 28.

к уравнениям высших приближений вводит обычно лишь поправки количественного характера, например поправки к величине стационарной амплитуды и т. п.

Заметим, что условие самовозбуждения колебаний не является необходимым для возможности существования устойчивого стационарного режима колебаний. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы уравнение стационарности (5.2) имело по крайней мере один не равный нулю корень, удовлетворяющий условию (5.4).

Кроме аналитического исследования функции  $\Phi(a)$ , во многих случаях для определения характера колебательного процесса удобно рассматривать графики типа рис. 25—28, на которых приведена зависимость  $\Phi(a)$  от  $a$ .

Стационарные амплитуды здесь определяются точками пересечения кривой  $\Phi(a)$  с осью абсцисс. Нетрудно убедиться, что точки, в которых кривая пересекает ось  $Oa$  сверху вниз, соответствуют устойчивым

амплитудам колебаний, а точки, в которых кривая пересекает ось  $Oa$  снизу вверх, дают неустойчивые амплитуды.

Действительно, в первом случае нарушение стационарной амплитуды вызывает такое ее последующее изменение, благодаря которому амплитуда возвращается к своему стационарному значению. Во втором случае имеем обратную картину. На рис. 25—28 стрелками показано направление изменения  $a$ . Рис. 25 соответствует диссипативному случаю, рис. 26 — случаю самовозбуждения с одной возможной стационарной амплитудой, рис. 27 — случаю самовозбуждения с несколькими возможными стационарными амплитудами:  $a_1, a_3, a_5$  (колебания с амплитудами  $a_2, a_4$ , очевидно, неустойчивы).

Вообще, если функция  $\Phi(a)$  имеет корень  $a^*$ , удовлетворяющий неравенству  $\Phi'(a^*) < 0$ , то возможен стационарный режим колебаний с постоянной амплитудой, равной  $a^*$ . Заметим, что стационарная амплитуда самовозбужденных колебаний (т. е. предел монотонно возрастающей амплитуды колебаний, для которых  $a^0$  было весьма мало) равна наименьшей из всех возможных стационарных амплитуд. Этот факт становится ясным из того очевидного физического соображения, что амплитуда, возрастающая, не может перескочить через устойчивый корень уравнения  $\Phi(a) = 0$ , т. е. через корень этого уравнения, удовлетворяющий условию  $\Phi'(a) < 0$ .

На рис. 28 изображен случай, когда система несамовозбуждена, но вместе с тем в ней все же возможны стационарные колебания. В этом случае если начальное значение амплитуды  $a^0$  меньше  $a_1$ , то колебания затухают, если же оно больше  $a_1$ , то колебания устанавливаются и в пределе превращаются в стационарные колебания с амплитудой  $a_2$ .

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (5.6)$$

встречающееся в теории ламповых генераторов.

Чтобы обеспечить применимость к этому уравнению полученных нами результатов, допустим, что возмущающий член является достаточно малым, и положим

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4) \frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Тогда получим:

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi = \lambda_1 a\omega + \frac{\lambda_3 a^3 \omega}{4} + \frac{\lambda_5 a^5 \omega}{8},$$

и потому на основании (1.27) приходим к следующему уравнению первого приближения для амплитуды:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{\lambda_3 a^3}{8} - \frac{\lambda_5 a^5}{16}.$$

Заметим, что если  $\lambda_5 < 0$ , то правая часть этого уравнения оказывается положительной для всех достаточно больших значений  $a$ . Таким образом, в этом случае колебания с достаточно большой амплитудой неограниченно раскачиваются, т. е.  $a(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , что, очевидно, невозможно по физическим соображениям.

Допустим поэтому, что  $\lambda_5 > 0$ . Далее заметим, что условием самовозбуждения будет  $\lambda_1 < 0$ . Рассматривая случай отсутствия самовозбужде-

ния, положим  $\lambda_1 > 0$ . Решая уравнение

$$\frac{\lambda_1 a}{2} + \frac{\lambda_3 a^3}{8} + \frac{\lambda_5 a^5}{16} = 0, \quad (5.7)$$

кроме «статического» решения  $a = 0$ , находим:

$$a^2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_5} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}.$$

Так как  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_5 > 0$ , то, если  $\lambda_3 > 0$  или если  $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 < \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}$ , уравнение (5.7) не имеет положительных решений. График зависимости  $\frac{da}{dt}$  от  $a$  имеет вид, представленный на рис. 25, показывающим, что колебания любой амплитуды являются затухающими.

Пусть, наоборот,

$$\lambda_3 < 0, \quad \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 > \frac{8\lambda_1}{\lambda_5};$$

тогда имеем два возможных значения для амплитуды стационарных колебаний:

$$a_1 = \sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_5} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}},$$

$$a_2 = \sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_5} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\right)^2 - \frac{8\lambda_1}{\lambda_5}}}.$$

График зависимости  $\frac{da}{dt}$  от  $a$  в этом случае приведен на рис. 29. Очевидно, что  $a_1$  соответствует неустойчивым, а  $a_2$  — устойчивым колебаниям.

Итак, колебания с начальной амплитудой, меньшей  $a_1$ , будут затухать, а колебания с начальной амплитудой, большей  $a_1$ , будут приближаться к устойчивому стационарному режиму.

Рассмотрим теперь случай, когда в колебательной системе имеется некоторый параметр  $\mu$  (или группа параметров), который можно изменять как угодно медленно (адиабатически). В этом случае правая часть уравнения (5.1) будет зависеть от  $\mu$  и может быть представлена в виде  $\Phi(a, \mu)$ .

Будем рассматривать изменение параметра, настолько медленное по сравнению с эффективной длительностью переходного режима (т. е. по сравнению с временем, по истечении которого произвольное колебание становится практически стационарным), что для каждого значения  $\mu$  в течение этого изменения колебание можно предполагать стационарным.

Для определенности допустим, что для  $\mu$ , меньших некоторого  $\mu_0$ ,

$$\Phi'_a(0, \mu) < 0,$$

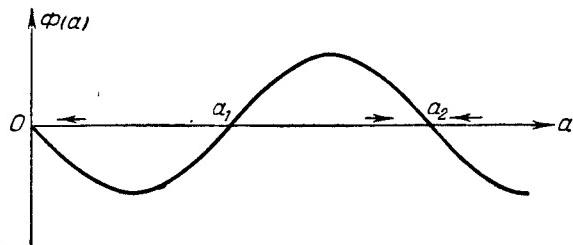


Рис. 29.

а для  $\mu$ , больших этого значения,

$$\Phi'_a(0, \mu) > 0.$$

Будем теперь адиабатически изменять  $\mu$ , увеличивая его, начиная с некоторого значения  $\mu_1$ , меньшего  $\mu_0$ .

Пусть система находилась вначале в равновесии:  $a = 0$ . Тогда, поскольку при  $\mu < \mu_0$  система не самовозбуждена, она и останется в равновесии вплоть до достижения параметром  $\mu$  критического значения, равного  $\mu_0$ . При переходе через это критическое значение появляется самовозбуждение, и равновесие становится невозможным, амплитуда  $a$  от нуля переходит к значению  $a(\mu)$ , равному наименьшему устойчивому корню уравнения

$$\Phi(a, \mu) = 0.$$

Таким образом, зависимость амплитуды от параметра представляется в виде

$$\begin{aligned} a &= 0 && \text{для } \mu < \mu_0, \\ a &= a(\mu) && \text{для } \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Если полученная кривая

зависимости  $a$  от  $\mu$  непрерывна, то мы будем говорить, что имеем случай мягкого возбуждения колебаний (по отношению к данному параметру). В случае мягкого возбуждения при переходе через критическое значение  $\mu = \mu_0$  в системе начинается генерация колебаний, амплитуда которых вблизи критического значения постепенно возрастает от нуля.

Если же в точке  $\mu = \mu_0$  имеется разрыв, то тогда при переходе через критическое значение амплитуда перескакивает от нулевого значения сразу к значению  $a(\mu_0 + 0)$ . Этот случай называют случаем жесткого возбуждения.

Пусть, например, правая часть уравнения (5.1) имеет следующий вид:

$$\Phi(a, \mu) = \left\{ \Phi(a) - \frac{a}{\mu} \right\} \Psi(a, \mu), \quad (5.8)$$

где  $\Psi(a, \mu) > 0$  и  $\Phi(a)$  — некоторая функция  $a$ , не зависящая от  $\mu$ .

В этом случае вопрос о характере возбуждения можно решить с помощью следующих графических построений.

Построим кривую (рис. 30)

$$y = \Phi(a).$$

Тогда стационарные амплитуды определяются точками пересечения этой кривой прямыми вида  $y = \frac{1}{\mu} a$ . Устойчивыми будут те, для которых угол наклона прямой больше угла наклона касательной в точке пересечения.

Таким образом, на рис. 30 имеем случай мягкого возбуждения, так как при переходе  $\mu$  через критическое значение, равное

$$\mu_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \xi} = \frac{1}{\Phi'_a(0)},$$

амплитуда начинает возрастать от нуля.

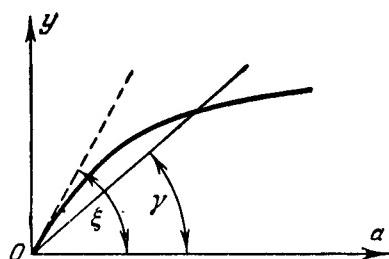


Рис. 30.

На рис. 31 имеем случай жесткого возбуждения. При переходе через критическое значение амплитуда перескакивает от нуля к  $a_1$ .

Рассмотрим детально случай, представленный на рис. 31. Пусть мы увеличиваем постепенно параметр  $\mu$  от нуля, уменьшая таким образом угол  $\gamma$  наклона прямой  $y = \frac{1}{\mu}a$ , и пусть система находится вначале в состоянии покоя  $a = 0$ .

Тогда, очевидно, амплитуда будет равна нулю вплоть до того момента, пока  $\gamma$  не станет меньше  $\xi$ . После перехода через  $\xi$  амплитуда

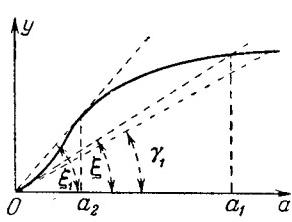


Рис. 31.

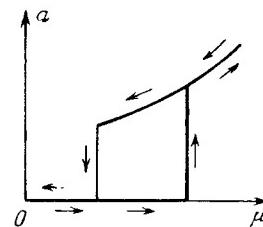


Рис. 32.

скакком принимает значение  $a_1$  и затем начинает непрерывно расти. Если мы теперь начнем уменьшать  $\mu$  (увеличивать  $\gamma$ ), начиная от значения  $\gamma_1 > \xi$ , то амплитуда будет убывать и, начиная с  $\gamma = \xi_1$ , срывается, при этом в системе устанавливается состояние покоя. Отобразив графически зависимость  $a$  от  $\mu$  в течение такого процесса, получим кривые (рис. 32), имеющие характерную гистерезисную петлю. Значение стационарной амплитуды зависит не только от значения параметра, но и от того, каким образом этот параметр изменялся.

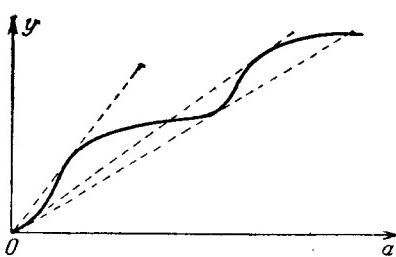


Рис. 33.

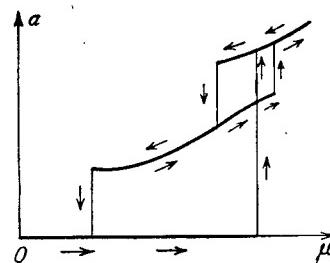


Рис. 34.

Подобного рода явления наблюдаются в некоторых автоколебательных системах и называются колебательным гистерезисом или затягиванием; последнее наименование отражает тот факт, что при бесконечно медленном, или, как иногда говорят, адиабатическом, изменении параметра амплитуда стремится как бы затянуть возможно дальше плавное изменение до тех пор, пока непрерывное изменение приводит к неустойчивым амплитудам.

Гистерезисные петли могут иметь и более сложную форму, чем на рис. 32. Так, например, для случая диаграммы рис. 33 при изменении  $\mu$  имеем зависимость, схематически изображенную на рис. 34. Для исследования характера возбуждения колебаний можно воспользоваться еще следующим приемом, по существу аналогичным вышеизложенному.

Построим кривую

$$y = \frac{\Phi(a)}{a}. \quad (5.9)$$

Тогда стационарные амплитуды определяются точками пересечения этой кривой прямыми, параллельными оси  $a$ :

$$y = \frac{1}{\mu}. \quad (5.10)$$

Условие устойчивости

$$\frac{\partial \Phi(a, \mu)}{\partial a} < 0$$

может быть записано в виде

$$\frac{\partial \left\{ \frac{\Phi(a)}{a} - \frac{1}{\mu} \right\}}{\partial a} < 0 \quad (5.11)$$

и потому допускает простую геометрическую интерпретацию. Устойчивыми будут амплитуды, соответствующие таким точкам пересечения кривой

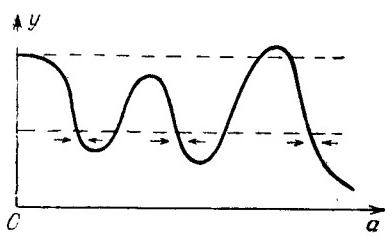


Рис. 35.

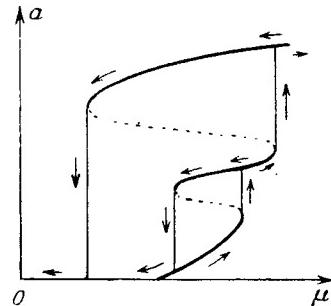


Рис. 36.

(5.9) с прямой (5.10), в которых направление кривой идет сверху вниз (рис. 35).

Сказанное относится к стационарным амплитудам, не равным нулю. Кроме этого, всегда существует и стационарная амплитуда, равная нулю. Она будет неустойчива, если

$$\left\{ \frac{\Phi(a)}{a} \right\}_{a=0} > \frac{1}{\mu}, \quad (5.12)$$

т. е. если точка пересечения кривой (5.9) с осью  $a = 0$  лежит выше точки пересечения с этой осью прямой (5.10). В противном случае равновесие устойчиво.

Как видно, этот последний графический прием удобнее первого, так как в этом случае не требуется проводить касательных. В остальном рассуждения остаются теми же, что дает нам возможность не детализировать их.

На рис. 36 схематически изображена картина колебательного гистерезиса, соответствующего случаю, изображеному на рис. 35.

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение электронного генератора (при безразмерном времени):

$$\frac{d^2V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) f' (E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (5.13)$$

Здесь  $V$  — переменная слагающая управляемого напряжения,  $L$ ,  $C$  и  $R$  — соответственно самоиндукция, емкость и сопротивление колебательного контура,  $M$  — коэффициент взаимной индукции между цепью сетки и колебательным контуром,  $E_0$  — постоянная слагающая управляемого напряжения,  $D$  — проницаемость лампы.

Ввиду того, что при обычном устройстве генератора безразмерное выражение

$$\frac{1}{VLC} \left\{ \frac{1}{R} - (M - DL) f'(E_0 + V) \right\} \quad (5.14)$$

будет величиной порядка 0,01, для построения приближенного решения можем воспользоваться ранее выведенными формулами.

На основании (1.23), (1.24) и (1.27) в первом приближении имеем:

$$V = a \cos(t + \varphi), \quad (5.15)$$

причем

$$2VLC \frac{da}{dt} = -\frac{L}{R} a + (M - DL) F(a), \quad (5.16)$$

где

$$F(a) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \cos \tau) \sin^2 \tau d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \tau) \sin \tau d\tau. \quad (5.17)$$

Характер возбуждения колебаний, выраженный уравнением (5.16), согласно изложенному выше может быть исследован двумя графическими приемами:

1) Путем построения кривой

$$y = F(a),$$

так называемой колебательной характеристики лампы. Тогда стационарные амплитуды определяются точками пересечения этой кривой с прямыми

$$y = \frac{L}{(M - DL) R} a.$$

2) Путем построения кривой

$$y = \frac{F(a)}{a}$$

и рассмотрения ее пересечений с прямыми

$$y = \frac{L}{(M - DL) R},$$

параллельными осями  $y = 0$ .

Заметим мимоходом, что угловой коэффициент касательной к характеристике лампы, т. е.  $f'(E)$ , именуется обычно в радиотехнике крутизной характеристики.

Ввиду того, что

$$\frac{F(a)}{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \cos \tau) \sin^2 \tau d\tau = f'(E_0 + a \cos \vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

выражение  $\frac{F(a)}{a}$  можно назвать средней крутизной лампы.

Поэтому первый графический метод иногда называется методом колебательной характеристики, второй — методом средней крутизны.

В данном примере параметр  $\mu = \frac{(M - DL) R}{L}$ .

В настоящем параграфе мы подробно рассмотрели первое уравнение системы (1.3), выражающее зависимость амплитуды от времени и тем самым характеризующее свойства колебательного процесса с точки зрения его амплитуды.

Что касается второго уравнения системы (1.3), то оно характеризует частотные свойства колебаний.

Согласно этому уравнению мгновенная собственная частота колебаний  $\frac{d\psi}{dt}$  равна  $\omega(a)$ . Поэтому в случае стационарных колебаний  $\dot{\psi}(a)$ , являясь постоянной, будет обычной собственной частотой.

Легко видеть, что собственная частота  $\omega(a)$ , а тем самым и период  $T = \frac{2\pi}{\omega(a)}$  стационарных колебаний, зависит от амплитуды. Таким образом, вообще говоря, нелинейные колебательные системы не изохронны.

Как мы видели выше, в некоторых важных частных случаях нелинейная колебательная система в первом приближении может быть изохронной.

### § 6. Построение стационарных решений

В предыдущих параграфах нами приведен метод построения приближенных решений для уравнений типа (1.1). Построены первые и высшие приближения для различных частных случаев уравнения (1.1), а также произведены расчеты для конкретных примеров. Как мы убедились выше, во всех случаях решение нелинейного дифференциального уравнения типа (1.1) заменяется решением двух уравнений первого порядка, определяющих амплитуду и фазу колебания.

Таким образом, для того чтобы построить приближенное решение с определенной, наперед заданной точностью, нам необходимо составить уравнения типа (1.5) и после этого найти из них выражения для амплитуды и фазы как функций времени.

Для определения приближенных решений, соответствующих установленномуся режиму в колебательной системе (стационарным колебаниям), необходимо приравнять правую часть уравнения (5.1) нулю, так как при стационарном режиме амплитуда постоянна и, следовательно, производная от нее равна нулю. Из полученного алгебраического уравнения находим стационарные значения амплитуды. Однако для построения приближенных решений, соответствующих непосредственно стационарным колебаниям, можно указать более простой способ, чем изложенный выше.

Рассмотрим сначала уравнение консервативной колебательной системы (2.1), которое можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x). \quad (6.1)$$

Согласно результатам § 2 стационарное решение этого уравнения во втором приближении имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n(\omega t + \varphi)}{n^2 - 1}, \\ \omega_{II}^2(a) &= \omega^2 - \varepsilon \frac{f_1(a)}{a} + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где  $f_n(a)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — коэффициенты Фурье в разложении

$$\left. \begin{aligned} f(a \cos \psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \cos n\psi, \\ f_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$a$  и  $\varphi$  — постоянные интегрирования, определяющиеся начальными значениями.

Исходя из выражений (6.2), естественно для получения высших приближений, соответствующих стационарному режиму, воспользоваться следующим приемом.

Представим решение уравнения (6.1) в виде  $x = z(\bar{\omega}t + \varphi)$ , где  $z(\bar{\omega}t + \varphi)$  — периодическая функция  $\bar{\omega}t + \varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Заметим, что  $x = z(\bar{\omega}t + \varphi)$  будет удовлетворять уравнению (6.1) только тогда, когда  $z(\bar{\omega}t + \varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\bar{\omega}^2 \frac{d^2 z}{d\psi^2} + \omega^2 z = \varepsilon f(z). \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.4)  $z = z(\psi)$ ,  $\psi = \bar{\omega}t + \varphi$ , а также выражение для частоты колебания  $\bar{\omega}$  естественно искать в виде разложений

$$z(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n(\psi), \quad (6.5)$$

$$\bar{\omega}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \alpha_n, \quad (6.6)$$

коэффициенты которых определим, подставив (6.5) и (6.6) в (6.4) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ , причем потребуем, чтобы  $z_n(\psi)$  были периодическими функциями  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Произведя подстановку, получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + \omega^2 z_0 &= 0, \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + \omega^2 z_1 &= f(z_0) - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2}, \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + \omega^2 z_2 &= f'(z_0) z_1 - \alpha_2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2}, \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + \omega^2 z_3 &= f'(z_0) z_2 + \frac{1}{2} f''(z_0) z_1^2 - \alpha_3 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Определяя из первых  $N+1$  уравнений системы (6.7) функции  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_N$ , а также величины  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ , можем составить выражение

$$x = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n z_n(\bar{\omega}t + \varphi), \quad (6.8)$$

где

$$\bar{\omega}^2 = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \alpha_n,$$

которое будет удовлетворять уравнению (6.1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{N+1}$  и, следовательно, может рассматриваться как  $N+1$ -е приближение решения уравнения (6.1), соответствующее стационарным колебаниям. Определение функций  $z_n(\omega t + \phi)$  и величин  $\alpha_n (n = 0, 1, 2, \dots)$  из уравнений (6.7) может быть произведено, вообще говоря, неоднозначно. Для того чтобы эти величины были определены однозначно, необходимо наложить некоторые дополнительные условия.

Потребуем, чтобы  $z_n(\phi) (n = 1, 2, 3, \dots)$  не имели в своем составе основной гармоники аргумента  $\phi$ . Из первого уравнения (6.7) находим:

$$z_0(\phi) = a \cos \phi, \quad \alpha_0 = \omega^2. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) во второе уравнение системы (6.7), имеем:

$$\omega^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = f(a \cos \phi) + \alpha_1 a \cos \phi \quad (6.10)$$

или, учитывая (6.3),

$$\omega^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} f_n(a) \cos n\phi + (\alpha_1 a + f_1(a)) \cos \phi. \quad (6.11)$$

Принимая во внимание требование периодичности функции  $z_1(\phi)$ , приравниваем в правой части уравнения (6.11) нуль коэффициент при первой гармонике аргумента  $\phi$ . В результате получаем уравнение для определения  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 a + f_1(a) = 0,$$

откуда находим:

$$\alpha_1 = -\frac{f_1(a)}{a}.$$

Подставляя найденное значение  $\alpha_1$  в правую часть уравнения (6.11), имеем:

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} f_n(a) \cos n\phi, \quad (6.12)$$

откуда находим для  $z_1(\phi)$  следующее выражение:

$$z_1(\phi) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n\phi}{1 - n^2}. \quad (6.13)$$

При этом как выражение (6.13), так и выражение для  $\alpha_1$  совпадают с выражениями, найденными согласно общему методу.

Продолжая изложенный процесс, можем последовательно определить все функции  $z_1, z_2, z_3, \dots$  и величины  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  до сколь угодно большого значения индекса и тем самым построить приближенные решения, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению (6.1) с точностью до любой степени  $\varepsilon$ .

В качестве примера определим стационарное решение в третьем улучшенном приближении (с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$  включительно) для колебательной системы, описываемой уравнением вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (6.14)$$

Для определения функций  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  и величин  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  на основании (6.7) получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + z_0 &= 0, \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 &= -z^3 - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2}, \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 &= -3z_0^2 z_1 - \alpha_2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2}, \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 &= -3z_0^2 z_2 - 3z_1 z_0 - \alpha_3 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - \alpha_2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Из первого уравнения находим:

$$z_0(\psi) = a \cos \psi, \quad \alpha_0 = 1. \quad (6.16)$$

После этого второе уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -a^3 \cos^3 \psi + \alpha_1 a \cos \psi, \quad (6.17)$$

или

$$\frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 = -\frac{a^3}{4} \cos 3\psi + \left( \alpha_1 a - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos \psi, \quad (6.18)$$

откуда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{4} a^2, \\ z_1(\psi) &= \frac{a^3}{32} \cos 3\psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Подставляя (6.16) и (6.19) в третье уравнение системы (6.15), получаем:

$$\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 = -\frac{3a^5}{32} \cos^2 \psi \cos 3\psi + \frac{27}{128} a^5 \cos 3\psi + \alpha_2 a \cos \psi, \quad (6.20)$$

или

$$\frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 = \frac{21}{128} a^5 \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128} \cos 5\psi + \left( \alpha_2 a - \frac{3a^5}{128} \right) \cos \psi, \quad (6.21)$$

откуда находим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{3a^4}{128}, \\ z_2(\psi) &= -\frac{21}{1024} a^5 \cos 3\psi + \frac{a^5}{1024} \cos 5\psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

После этого последнее уравнение системы (6.15) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 &= -3a^2 \cos^2 \psi \left( -\frac{21}{1024} a^5 \cos 3\psi + \frac{a^5}{1024} \cos 5\psi \right) - \\ &- 3 \frac{a^6}{1024} \cos^2 3\psi a \cos \psi + \alpha_3 a \cos \psi + \frac{3a^4}{128} \frac{9a^3}{32} \cos 3\psi - \\ &- \frac{3}{4} a^2 \left( \frac{21}{1024} a^5 9 \cos 3\psi - \frac{a^5}{1024} 25 \cos 5\psi \right), \end{aligned} \quad (6.23)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_3}{d\psi^2} + z_3 &= -\frac{1059a^7}{2048} \cos 3\psi + \frac{177}{2048} a^7 \cos 5\psi - \\ &- \frac{3}{2048} a^7 \cos 7\psi + \left( \alpha_3 a + \frac{57}{4096} a^7 \right) \cos \psi, \end{aligned} \quad (6.24)$$

из которого находим:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{57}{4096} a^6, \\ z_3(\psi) &= \frac{1059}{2048 \cdot 8} a^7 \cos 3\psi - \frac{177}{2048 \cdot 24} a^7 \cos 5\psi + \frac{3}{2048 \cdot 48} a^7 \cos 7\psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Таким образом, принимая во внимание (6.8), (6.19), (6.22) и (6.25), получаем приближенное стационарное решение уравнения (6.14) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$  включительно в виде

$$\begin{aligned} x = a \cos(\bar{\omega}t + \varphi) + \varepsilon \frac{a^3}{32} \left[ 1 - \varepsilon \frac{21}{32} a^2 + \varepsilon^2 \frac{1059}{512} a^4 \right] \cos 3(\bar{\omega}t + \varphi) + \\ + \varepsilon^2 \frac{a^5}{1024} \left[ 1 - \varepsilon \frac{177}{48} a^2 \right] \cos 5(\bar{\omega}t + \varphi) + \varepsilon^3 \frac{3a^7}{2048 \cdot 48} \cos 7(\bar{\omega}t + \varphi), \end{aligned} \quad (6.26)$$

где  $a$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные, а частота колебаний  $\bar{\omega}$  определяется выражением

$$\bar{\omega}^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 + \frac{3}{128} \varepsilon^2 a^4 - \frac{57}{4096} \varepsilon^3 a^6. \quad (6.27)$$

Перейдем теперь к построению приближенных решений для стационарных колебаний в неконсервативных системах. Для этого рассмотрим уравнение вида (1.1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}). \quad (6.28)$$

Стационарное решение (улучшенное первое приближение) этого уравнения согласно § 2 может быть записано в виде

$$x = a \cos \psi + \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1}, \quad (6.29)$$

где  $g_n(a)$  и  $h_n(a)$  ( $n = 0, 2, 3, \dots$ ) определяются согласно формулам (1.29),  $\psi = \omega(a)t + \varphi$ , а  $a$  и  $\omega(a)$  должны быть найдены из следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= 0, \\ \bar{\omega}(a) &= \omega + \varepsilon B_1(a), \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

$A_1(a)$  и  $B_1(a)$  определяются согласно формулам (1.27).

Для случая консервативных колебательных систем, как мы уже убедились,  $A_1(a)$  тождественно равно нулю, и поэтому выражение для приближенного стационарного решения (6.29) зависит от двух произвольных постоянных  $a$  и  $\varphi$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $A_1(a)$  не обращается тождественно в нуль ни в каком интервале значений  $a$ . Предположим также, что функция  $A_1(a)$  имеет лишь простые корни. В этом случае каждому корню  $A_1(a)$  соответствует некоторое стационарное состояние, причем выражение (6.29) для этого стационарного состояния зависит лишь от одной произвольной постоянной, а именно от  $\varphi$ .

Приступая к изложению формальной методики построения стационарных решений уравнения (1.1), воспользуемся в основном способом, примененным выше для консервативных колебательных систем.

Решение уравнения (6.28), соответствующее стационарным колебаниям, представим в виде

$$x = z(\bar{\omega}t + \varphi), \quad (6.31)$$

где  $\varphi$  — произвольная постоянная,  $\bar{\omega}$  — частота колебания,  $z(\psi)$  — периодическая функция  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Как и выше, функция  $z(\psi)$  должна удовлетворять уравнению

$$\bar{\omega}^2 \frac{d^2 z}{d\psi^2} + \omega^2 z = ef\left(z, \bar{\omega} \frac{dz}{d\psi}\right). \quad (6.32)$$

Будем искать функцию  $z(\psi)$  и частоту колебаний  $\bar{\omega}$  в виде разложений

$$\left. \begin{aligned} z(\psi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n(\psi), \\ \bar{\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n, \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

где  $z_n(\psi)$  — периодические функции  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Подставляя значения  $z(\psi)$  и  $\bar{\omega}$  (6.33) в уравнение (6.32) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} + \omega^2 z_0 &= 0, \\ \omega_0^2 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + \omega^2 z_1 &= f\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) - 2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2}, \\ \omega_0^2 \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + \omega^2 z_2 &= f'_z\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) z_1 + f'_{z'}\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) \omega_0 \frac{dz_1}{d\psi} + \\ &\quad + f'_{z'}\left(z_0, \omega_0 \frac{dz_0}{d\psi}\right) \omega_1 \frac{dz_0}{d\psi} - 2\omega_0 \omega_2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2} - 2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} - \omega_1^2 \frac{d^2 z_0}{d\psi^2}, \\ &\quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Решаем первое из этих уравнений, полагая

$$z_0 = a \cos \psi, \quad \omega_0 = \omega, \quad (6.35)$$

где  $a$  — некоторая, пока не определенная постоянная.

Подставив значения  $z_0(\psi)$  и  $\omega_0$  (6.35) в правую часть второго уравнения системы (6.34) и учитывая (1.16), имеем

$$\omega^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi] + 2\omega \omega_1 a \cos \psi. \quad (6.36)$$

Чтобы это уравнение имело относительно  $z_1(\psi)$  периодическое решение (т. е. чтобы в выражении для  $z_1(\psi)$  не появилось секулярных членов), необходимо приравнять нулю коэффициенты при основной гармонике, входящей в правую часть (6.36).

Приравнивая, получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} h_n(a) &= A_1(a) = 0, \\ \omega_1 &= -\frac{g_1(a)}{2a\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

определяющие  $a$  и  $\omega_1$ . После этого уравнение (6.36) примет вид

$$\omega^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\psi^2} + z_1 \right) = g_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi]. \quad (6.38)$$

Решая его, находим:

$$z_1(\psi) = a_1 \cos \psi + \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1-n^2}, \quad (6.39)$$

где  $a_1$  — произвольная постоянная, которая должна быть определена из условия периодичности  $z_2(\psi)$ .

Покажем, как определяется  $a_1$ . Для этого выражение для  $z_1(\psi)$  представим в виде

$$z_1(\psi) = a_1 \cos \psi + u(a, \psi), \quad (6.40)$$

где

$$u(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi}{1-n^2}$$

является известной периодической функцией  $\psi$ .

Подставляя значение  $z_1(\psi)$  (6.40) в третье уравнение системы (6.34), получим:

$$\begin{aligned} \omega^2 \left( \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) &= f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) a_1 \cos \psi - \\ &- f'_{z'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) a_1 \omega \sin \psi + 2\omega \omega_1 a_1 \cos \psi + \\ &+ 2\omega \omega_2 a \cos \psi + v(\psi), \end{aligned} \quad (6.41)$$

где

$$\begin{aligned} v(\psi) &= f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u + f'_{z'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \omega \frac{du}{d\psi} + \\ &+ f'_{z'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \omega_1 a \sin \psi + \omega_1^2 a \cos \psi. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Напишем разложение для  $v(\psi)$  в ряд Фурье:

$$v(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi]. \quad (6.43)$$

Кроме того, имеем:

$$f'_z(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi - f'_{z'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \omega \sin \psi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [g'_n(a) \cos n\psi + h'_n(a) \sin n\psi], \quad (6.44)$$

и поэтому уравнение (6.41) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 \left( \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) &= a_1 \sum_{n=0}^{\infty} [g'_n(a) \cos n\psi + h'_n(a) \sin n\psi] + \\ &+ 2\omega (\omega_1 a_1 + \omega_2 a) \cos \psi + \sum_{n=0}^{\infty} [v_n(a) \cos n\psi + w_n(a) \sin n\psi]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Для того чтобы  $z_2(\psi)$  являлось периодической функцией, необходимо в правой части уравнения (6.45) приравнять нулю коэффициенты при  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$ . Получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_1 h'_n(a) &= -\omega_1(a), \\ a_1 g'_1(a) + 2\omega (\omega_1 a_1 + \omega_2 a) &= -v_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Первое из этих уравнений определяет  $a_1$ :

$$a_1 = -\frac{w_1(a)}{h'_1(a)}, \quad (6.47)$$

причем  $h'_1(a) = A'_1(a) \neq 0$ , так как мы предположили, что функция  $A_1(a)$  имеет только простые корни.

Из второго уравнения находим  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = -\frac{1}{a} \left[ \frac{v_1(a) + a_1 g'_1(a)}{2\omega} + \omega_1 a_1 \right]. \quad (6.48)$$

После этого уравнение (6.45) можем записать в виде

$$\omega^2 \left( \frac{d^2 z_2}{d\psi^2} + z_2 \right) = (v_0(a) + a_1 g'_0(a)) + \sum_{n=2}^{\infty} \{(v_n(a) + a_1 g'_n(a)) \cos n\psi + (w_n(a) + a_1 h'_n(a)) \sin n\psi\}. \quad (6.49)$$

Решением этого уравнения будет:

$$z_2(\psi) = a_2 \cos \psi + \frac{1}{\omega^2} (v_0(a) + a_1 g'_0(a)) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \{(v_n(a) + a_1 g'_n(a)) \cos n\psi + (w_n(a) + a_1 h'_n(a)) \sin n\psi\} \frac{1}{1-n^2}, \quad (6.50)$$

где  $a_2$  — неопределенная постоянная, которую определяем из условия периодичности функции  $z_3(\psi)$  и т. д. Продолжая изложенный процесс, можем построить приближенные решения для стационарного режима с любой наперед заданной степенью точности. Например, во втором приближении согласно (6.31), (6.39) и (6.37) имеем:

$$x = (a + \varepsilon a_1) \cos (\bar{\omega}t + \varphi) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} g_0(a) + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n(\bar{\omega}t + \varphi) + h_n(a) \sin n(\bar{\omega}t + \varphi)}{1-n^2}, \quad (6.51)$$

где

$$\bar{\omega} = \omega + \varepsilon \frac{g_1(a)}{2\omega a}, \quad (6.52)$$

а амплитуда должна быть определена из уравнения

$$h_n(a) = 0. \quad (6.53)$$

Сравнивая полученное выражение для  $x$  (6.51) с ранее найденным выражением для стационарного режима (6.29), замечаем, что единственное отличие этих двух решений состоит в том, что амплитуда первой гармоники в (6.29) равна  $a$ , где  $a$  — корень первого уравнения (6.30), а в формуле (6.51) амплитуда первой гармоники равна  $a + \varepsilon a_1$ . Однако такое расхождение полностью совпадает с нашим замечанием по этому поводу, приведенным в § 1.

## § 7. Эквивалентная линеаризация нелинейных колебательных систем

Как указывалось выше, уравнения первого приближения в большинстве случаев приводят к тем же качественным результатам, что и уравнения высших приближений.

Ввиду этого, а также ввиду сложности вычислений, с которыми, как правило, сопряжены операции с уравнениями высших приближений,

обычно целесообразно ограничиваться рассмотрением лишь уравнений первого приближения.

Эти уравнения допускают весьма простую физическую интерпретацию и могут быть образованы даже без предварительного составления исходного точного дифференциального уравнения, например типа (1.1).

В настоящем параграфе мы займемся вопросом интерпретации уравнений первого приближения.

Для этого напишем основное дифференциальное уравнение колебательной системы в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (7.1)$$

где  $m$  и  $k$  положительны.

Как было установлено, решение уравнения (7.1) в первом приближении может быть представлено в виде

$$x = a \cos \phi, \quad (7.2)$$

причем амплитуда  $a$  и полная фаза  $\phi$  должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e(a), \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

где

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi ma} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi.$$

Напомним, что первое приближение (7.2) является основной гармоникой приближенного решения (1.4), удовлетворяющего исходному уравнению (7.1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^m$ , а амплитуда  $a$  является согласно нашим допущениям полной амплитудой основной гармоники.

Заметив это, введем в рассмотрение функции амплитуды  $k_e(a)$  и  $\lambda_e(a)$ , определяемые следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \\ k_e(a) &= k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Тогда уравнения первого приближения (7.3) могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda_e(a)}{2m} a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e(a), \quad \omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Продифференцируем теперь выражение (7.2) для первого приближения. Приняв во внимание (7.5), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega_e(a) \sin \phi - \frac{\lambda_e(a)}{2m} a \cos \phi. \quad (7.6)$$

Дифференцируя (7.6) еще раз, убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a\omega_e^2(a) \cos \phi + \frac{\lambda_e(a)}{m} a\omega_e(a) \sin \phi + \frac{\lambda_e^2(a)}{4m^2} a \cos \phi + \\ &+ \frac{\lambda_e(a)}{2m} a^2 \frac{d\omega_e(a)}{da} \sin \phi + \frac{d\lambda_e(a)}{da} \frac{a}{2m} \frac{\lambda_e(a)}{2m} a \cos \phi = \\ &= -\frac{k_e(a)}{m} x - \frac{\lambda_e(a)}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{\lambda_e^2(a)}{4m^2} x + \\ &+ \frac{\lambda_e(a)}{2m} a^2 \frac{d\omega_e(a)}{da} \sin \phi + \frac{1}{2m} \frac{d\lambda_e(a)}{da} a \frac{\lambda_e(a)}{2m} x. \end{aligned} \quad (7.7)$$

После этого на основании (7.4) можем записать (7.7) в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a) x = O(\varepsilon^2), \quad (7.8)$$

где  $O(\varepsilon^2)$  – величина порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Таким образом, видим, что рассматриваемое первое приближение (7.2) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} + k_e(a) x = 0. \quad (7.9)$$

Итак, в первом приближении колебания исследуемой нелинейной колебательной системы эквивалентны (с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ , т. е. с точностью до величин, отбрасываемых при самом составлении уравнений первого приближения (7.3)) колебаниям некоторой линейной колебательной системы, обладающей коэффициентом затухания  $\lambda_e(a)$  и коэффициентом упругости  $k_e(a)$ .

Ввиду этого будем называть  $\lambda_e(a)$  эквивалентным коэффициентом затухания,  $k_e(a)$  – эквивалентным коэффициентом упругости, самой же линейной колебательной системе, описываемую уравнением (7.9), назовем эквивалентной системой.

Сравнивая уравнение (7.9) с уравнением (7.1), видим, что уравнение (7.9) получается из (7.1) путем замены нелинейного члена

$$F = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (7.10)$$

линейным

$$F_e = -\left[k_1(a)x + \lambda_e(a)\frac{dx}{dt}\right], \quad (7.11)$$

где  $k_1(a) = k_e(a) - k$ .

Заметим далее, что выражение

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$$

представляет собой декремент затухания эквивалентной линейной системы, а

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}$$

– собственную частоту колебаний этой системы.

Мы видим, следовательно, что уравнения первого приближения (7.5) могут быть формально образованы следующим образом.

Линеаризуем рассматриваемую колебательную систему, заменяя в основном уравнении (7.1) нелинейную силу (7.10) линейной (7.11), в которой

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \\ k_1(a) &= -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Для полученной эквивалентной линейной системы с массой  $m$ , коэффициентом затухания  $\lambda_e(a)$  и коэффициентом упругости  $k_e(a) = k + k_1(a)$  обычным путем находим декремент затухания  $\delta_e(a)$  и частоту собственных колебаний  $\omega_e(a)$ , отбрасывая при этом величины второго порядка малости.

Тогда получаем:

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}, \quad \omega_e^2(a) = \frac{k_e(a)}{m}. \quad (7.13)$$

Образовав выражения для декремента затухания и частоты, применим общеизвестные для линейных колебательных систем формулы

$$\frac{da}{dt} = -\delta a, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad (7.14)$$

выявляющие тот факт, что декремент затухания есть логарифмическая производная амплитуды, взятая с обратным знаком, и что частота  $\omega$  есть угловая скорость вращения полной фазы колебания.

Если мы в уравнения (7.14) подставим значения  $\delta$  и  $\omega$  по формулам (7.13) и (7.4), то получим равенства, совпадающие с ранее выведенными нами уравнениями первого приближения (7.3).

Изложенный формальный метод образования уравнений первого приближения будем называть методом линеаризации.

При пользовании этим методом возникает вопрос, почему с физической точки зрения при линеаризации, точнее говоря, при замене нелинейной силы (7.10) эквивалентной линейной силой (7.11), коэффициенты  $k_1(a)$  и  $\lambda_e(a)$  должны принимать именно те значения, которые даются формулами (7.12), а не какие-либо иные. Ввиду этого необходимо решить вопрос о физической интерпретации для этих формул.

Покажем прежде всего, что соответствующие (7.12) значения эквивалентного коэффициента затухания получим, приняв, что средние (за период колебания) мощности, развиваемые реальной (7.10) и эквивалентной (7.11) силами, равны. При этом, приравнивая выражения для обеих мощностей, следует пренебречь величинами порядка малости  $\varepsilon^2$ , так как уравнения первого приближения точны лишь до величин именно этого порядка малости.

Так как работа, совершаемая силой  $k_e(a)x$ , пропорциональной перемещению, за период колебания равна нулю, то, приравнивая друг другу мощности, развиваемые силами (7.10) и (7.11), получаем:

$$\varepsilon \int_0^T f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} dt = -\lambda_e(a) \int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt, \quad (7.15)$$

где  $T$  — период колебания. Из (7.15) следует также, что  $\lambda_e(a)$  должно быть величиной первого порядка малости.

Но с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon$  мы можем положить в течение интервала времени порядка  $\frac{2\pi}{\omega}$ :

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.16)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  постоянны в течение этого интервала. В таком же приближении  $\omega$  будет частотой колебаний, а  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  — периодом.

Подставив в обе части формулы (7.15) выражения (7.16), а также  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , имеем с точностью до величин второго порядка малости (так как в обеих частях (7.15) есть множители, являющиеся величинами первого порядка, именно  $\varepsilon$  и  $\lambda_e(a)$ ):

$$\begin{aligned} & -\varepsilon\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f[a \cos(\omega t + \vartheta), -a\omega \sin(\omega t + \vartheta)] a \sin(\omega t + \vartheta) dt = \\ & = -\lambda_e(a) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \vartheta) dt = -\lambda_e(a) a^2 \pi \omega \end{aligned} \quad (7.17)$$

или

$$\lambda_e(a) \pi \omega a^2 = \varepsilon a \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

Имеем, следовательно, как раз то значение коэффициента  $\lambda_e(a)$ , которое определяется по формулам (7.12).

Чтобы получить аналогичную интерпретацию и для другого коэффициента, для  $k_1(a)$ , воспользуемся принятным в электротехнике понятием реактивной мощности.

Напомним, что называется реактивной мощностью.

Пусть по некоторому проводнику  $AB$  протекает переменный ток  $i(t)$  и  $E(t)$  есть разность напряжений между концами  $A$  и  $B$  этого проводника.

Тогда активной мощностью  $P_a$ , отдаваемой или поглощаемой (в зависимости от знака) в рассматриваемом проводнике, называют величину работы, совершенной за период колебания  $T$ , разделенную на величину  $T$ , т. е.

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i(t) dt. \quad (7.18)$$

Как видно, понятие активной мощности полностью соответствует обычному понятию средней механической мощности; будучи связано с понятием работы или энергии, оно имеет вполне реальное физическое значение.

В электротехнике, однако, общепринято вводить в рассмотрение, кроме имеющего непосредственное физическое значение понятия активной мощности, еще и несколько искусственное понятие реактивной мощности.

Реактивной мощностью называют величину

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i^*(t) dt, \quad (7.19)$$

где функция  $i^*(t)$  представляет ток одинаковой формы с током  $i(t)$ , но отстающий по фазе относительно последнего на  $90^\circ$ , иначе говоря:

$$i^*(t) = i\left(t - \frac{T}{4}\right). \quad (7.20)$$

Ввиду очевидной и прямой аналогии между колебаниями механическими и электрическими представляется целесообразным использовать понятие реактивной мощности и для механических колебаний.

Допустим, например, что имеется некоторое тело, находящееся под воздействием какой-либо силы  $F(t)$  и совершающее периодические колебания.

Пусть  $T$  будет периодом колебания,  $x(t)$  — перемещением тела. Так как активной мощности в данном случае соответствует средняя механическая мощность

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt, \quad (7.21)$$

то, рассуждая по аналогии с предыдущим, естественно называть реактивной мощностью выражение вида

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt. \quad (7.22)$$

Приняв это определение и вернувшись к вопросу об интерпретации значения (7.12) для эквивалентного коэффициента  $k_1(a)$ , покажем, что именно это значение мы получим, если предварительно постулируем равенство реактивных мощностей (опять-таки с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ ), развиваемых реальной и эквивалентной силами. В самом деле, приравнивая друг другу выражения для обеих реактивных мощностей, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), x'(t)] x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt &= \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a)x(t) + \lambda_e(a)x'(t)] x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Так как  $\lambda_e(a)$  есть величина первого порядка малости, то очевидно, что  $k_1(a)$  будет того же порядка малости относительно  $\varepsilon$ .

Поэтому, подставляя в выражение для реактивных мощностей формулы:

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \vartheta), \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

точные до величин первого порядка малости, имеем с требуемой точ-

ностью:

$$\approx \frac{1}{T} \int_0^T f[x(t), x'(t)] x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{a\omega\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T [k_1(a)x(t) + \lambda_e(a)x'(t)] x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{a^2\omega k_1(a)}{2},$$

откуда на основании (7.23) получим:

$$k_1(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

т. е. то же самое выражение, что и по формуле (7.12).

Итак, резюмируя вышесказанное, видим, что при применении метода линеаризации параметры (эквивалентные коэффициенты) эквивалентной линейной силы

$$F_e = - \left[ k_1(a)x + \lambda_e(a) \frac{dx}{dt} \right], \quad (7.24)$$

заменяющей нелинейную:

$$F = \varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (7.25)$$

могут быть определены приравниванием друг другу выражений активных и реактивных мощностей, развиваемых силами (7.24) и (7.25) при гармонических колебаниях:

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta),$$

где  $\omega$  — частота в «нулевом» приближении.

Этот способ определения эквивалентных коэффициентов назовем принципом мощности или принципом энергетического баланса.

Приведем еще один, более простой прием определения эквивалентных коэффициентов.

Для этого подставим значения  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$  согласно формулам (7.16) в выражения (7.24) и (7.25).

Для гармонического колебания (7.16) линейная эквивалентная сила  $F_e$  также будет гармонической функцией времени с частотой  $\omega$ . Обозначая амплитуду и фазу  $F_e$  соответственно через  $J_e$  и  $\varphi_e$ , имеем:

$$F_e = J_e \cos(\omega t + \varphi_e). \quad (7.26)$$

Нелинейная сила будет, вообще говоря, периодической функцией времени, состоящей из различных гармоник с частотами вида  $n\omega$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Допустим, что

$$J \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.27)$$

является ее основной гармоникой. Тогда, приравнивая амплитуды и фазы

$$J_e = J, \quad \varphi_e = \varphi$$

эквивалентной силы (7.26) и основной гармоники нелинейной силы (7.27), получаем два уравнения, которые дают для параметров  $k_1(a)$  и  $\lambda_e(a)$  как раз те значения, что и формулы (7.12).

В самом деле, в раскрытом виде при гармоническом колебании эквивалентная линейная сила будет:

$$-k_1(a) a \cos(\omega t + \vartheta) + \omega \lambda_e(a) a \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.28)$$

а основная гармоника нелинейной силы:

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \right\} \cos(\omega t + \vartheta) + \\ + \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \right\} \sin(\omega t + \vartheta), \quad (7.29)$$

Приравнивая друг другу обе гармоники (7.28) и (7.29), получим (практически проще приравнивать не амплитуды и фазы, а соответственно коэффициенты при синусах и косинусах в выражениях первых гармоник):

$$ak_1(a) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (7.30) \\ \omega \lambda_e(a) a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

откуда для  $k_1(a)$  и  $\lambda_e(a)$  получаем те же самые значения, что и по формулам (7.12).

Этот последний прием будем называть принципом гармонического баланса.

Нетрудно установить, что принципы энергетического и гармонического баланса по существу вполне эквивалентны. Для этого необходимо заметить, что выражения мощностей

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt, \quad \frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'\left(t - \frac{T}{4}\right) dt,$$

развиваемых некоторой периодической (с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) силой  $F(t)$  при гармонических колебаниях

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta),$$

зависят лишь от основной гармоники  $F(t)$ .

Таким образом, если основные гармоники (гармоники с частотой  $\omega$ ) данных сил равны, то мощности, развивающие ими при гармонических колебаниях (частоты  $\omega$ ), также равны, и наоборот.

Этим обстоятельством и обусловлена существенная эквивалентность обоих вышеизложенных способов определения параметров эквивалентной линейной системы в методе линеаризации (принципа гармонического баланса и принципа энергетического баланса).

Заметим теперь, что нет никакой необходимости сначала составлять дифференциальное уравнение колебаний и лишь затем линеаризовать входящие в него нелинейные выражения.

Во многих случаях, особенно для более или менее сложных колебательных систем, может представиться, наоборот, более удобным до-

составления дифференциального уравнения, исходя непосредственно из рассмотрения схемы колебательной системы, заменить в ней нелинейные элементы эквивалентными линейными (например, при помощи принципа гармонического баланса), а затем находить выражения для частоты  $\omega_e(a)$  и декремента  $\delta_e(a)$ , исходя из общеизвестных классических формул теории линейных колебаний.

Основным условием допустимости такого рода метода эквивалентной линеаризации является, очевидно, приближенная гармоничность колебаний.

В качестве примера рассмотрим тело массы  $m$ , подвешенное на пружине и совершающее приближенно гармонические колебания (рис. 37). Пусть зависимость между упругой силой пружины  $F$  и растяжением ее  $x$  нелинейна и выражается следующим соотношением:

$$F = f(x). \quad (7.31)$$

Тогда для гармонических колебаний

$$x = a \cos(\omega t + \theta)$$

основная гармоника силы упругости будет:

$$\frac{\cos(\omega t + \theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

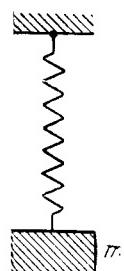


Рис. 37.

Пользуясь изложенным выше принципом гармонического баланса, можно заменить реальную нелинейную пружину эквивалентной линейной с коэффициентом упругости

$$k_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad (7.32)$$

после чего согласно известным формулам находим частоту линеаризованной системы

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}. \quad (7.33)$$

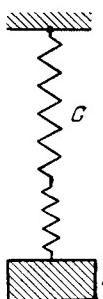


Рис. 38.

Если рассматриваемую колебательную систему, состоящую из тела массы  $m$  и нелинейной пружины, подвесить на линейной пружине с коэффициентом упругости  $c$  (рис. 38), то, предполагая, что колебания будут приближенно гармоническими (с достаточно велико), получим согласно принципу гармонического баланса для частоты колебаний следующую формулу:

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{c + k(a)}{m}}, \quad (7.34)$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\omega_e(a) = \sqrt{\frac{c}{m}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{k(a)}{c} \right). \quad (7.35)$$

Предположим теперь, что наша колебательная система испытывает при своих колебаниях некоторое слабое амортизирующее воздействие нелинейного типа и зависящее только от скорости:

$$\Phi = \Phi \left( \frac{dx}{dt} \right). \quad (7.36)$$

Тогда, предполагая, что колебания по форме будут оставаться близкими к гармоническим, для основной гармоники амортизирующей силы получим выражение

$$\frac{\sin(\omega t + \theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

На основании принципа гармонического баланса эту реальную силу можно заменить эквивалентной линейной амортизирующей силой

$$\Phi_e = \lambda_e(a) \frac{dx}{dt},$$

где коэффициент трения выражается следующей формулой:

$$\lambda_e(a) = -\frac{1}{a\omega\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (7.37)$$

после чего согласно известным формулам находим выражение для декремента затухания

$$\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}. \quad (7.38)$$

Заметим, что наличие трения при принятой нами степени точности не окажет влияния на частоту колебаний, так как  $\left(\frac{\lambda_e(a)}{\sqrt{cm}}\right)^2$  является величиной второго порядка малости.

В качестве второго примера рассмотрим электронный генератор, составленный согласно схеме, приведенной на рис. 39. Пусть сопротивление  $R$ , включенное последовательно, достаточно мало и, следовательно, колебательный контур, помещенный в этой схеме в цепи сетки, является слабозатухающим.

Обозначая ток в колебательном контуре  $i$ , имеем:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = M \frac{di_a}{dt}, \quad (7.39)$$

где  $i_a$  — анодный ток, зависящий от управляемого напряжения  $E$  (при отсутствии сеточного тока):

$$i_a = f(E). \quad (7.40)$$

Управляющее напряжение в электронном генераторе слагается из постоянного напряжения  $E_0$  и переменного управляющего напряжения  $e$ , индуцируемого колебательным контуром.

Таким образом, зависимость анодного тока от переменной слагающей управляющего напряжения будет:

$$i_a = f(E_0 + e). \quad (7.41)$$

Если  $e$  изменяется по закону

$$e = a \cos(\omega t + \theta),$$

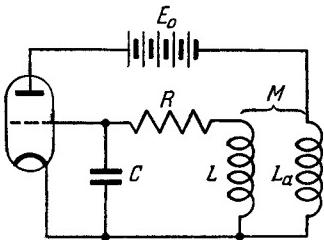


Рис. 39.

то основная гармоника анодного тока будет:

$$\frac{\cos(\omega t + \theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

и поэтому на основании принципа гармонического баланса можем заменить нелинейную зависимость (7.41) эквивалентной линейной

$$i_a = S e, \quad (7.42)$$

где параметр  $S$  — «средняя крутизна характеристики лампы» — имеет вид

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (7.43)$$

После этого уравнения (7.39) можно представить в виде

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = MS \frac{de}{dt}. \quad (7.44)$$

С другой стороны, исходя из схемы рис. 39, можно написать:

$$e = \frac{1}{C} \int i dt + D \left( M \frac{di}{dt} - L_a \frac{di_a}{dt} \right).$$

В случае, если проницаемость лампы очень мала, т. е.  $D$  близко к нулю, можно принять:

$$e = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (7.45)$$

Подставляя (7.45) в уравнение (7.44), получаем:

$$LC \frac{d^2 e}{dt^2} + (RC - MS) \frac{de}{dt} + e = 0,$$

откуда согласно обычным формулам находим выражения для собственной частоты и декремента затухания:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \delta_e(a) &= \frac{RC - MS(a)}{2LC}. \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

На этих простых примерах нами показан способ применения метода линеаризации непосредственно к самой схеме данной колебательной системы. При этом очевидно, что нелинейные элементы системы линеаризуются независимо от прочих параметров системы, роль которых при линеаризации сводится лишь к обеспечению приближенной гармоничности колебаний.

Подчеркнем еще раз тот факт, что эквивалентные линейные элементы существенно отличаются от истинных линейных тем, что их параметры — эквивалентные коэффициенты — являются не постоянными, а некоторыми определенными функциями амплитуды колебания.

Преимущество метода эквивалентной линеаризации при эффективном построении уравнений первого приближения особенно выясняется в случае сложных колебательных систем, для которых даже самое образование основных дифференциальных уравнений колебательного процесса, не говоря уже об операциях над ними, может представить затруднения.

В качестве применения метода эквивалентной линеаризации к системам со многими степенями свободы\*) рассмотрим колебательный контур, который схематически изображен на рис. 40 и состоит из линейной части с комплексным сопротивлением  $Z(i\omega)$  и нелинейного элемента с характеристикой напряжение — ток:

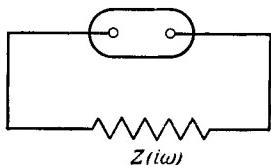


Рис. 40.

$$V = f(I).$$

Тогда соответствующее дифференциальное уравнение будет:

$$Z(p)I = f(I), \quad p = \frac{d}{dt}. \quad (7.47)$$

Предположим, что параметры системы таковы, что в ней возбуждаются периодические колебания, близкие к гармоническим:

$$I \approx a \cos(\omega t + \phi). \quad (7.48)$$

Тогда можем воспользоваться методом эквивалентной линеаризации и заменить в первом приближении нелинейный элемент линейным с характеристикой

$$V = SI,$$

где

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi.$$

Для стационарных колебаний найдем тогда уравнение вида

$$Z(i\omega) = S(a),$$

откуда, разделяя вещественную и мнимую части комплексного сопротивления

$$Z(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega),$$

получим:

$$\left. \begin{array}{l} X(\omega) = S(a), \\ Y(\omega) = 0. \end{array} \right\} \quad (7.49)$$

Одно из полученных уравнений служит для определения частоты, другое — для определения амплитуды колебания.

Метод эквивалентной линеаризации можно уточнить таким образом, чтобы получить не только уравнения первого, но и высших приближений.

Построим уравнения второго приближения. Для этого уточним формулу (7.48), включив в нее высшие гармоники и постоянный член.

В первом приближении напряжение на нелинейном элементе будет:

$$V = f(a \cos \vartheta), \quad \vartheta = \omega t + \phi. \quad (7.50)$$

Разложив это выражение в ряд Фурье, получим:

$$V = \sum_{(n \geq 0)} f_n(a) \cos n\vartheta,$$

\*) Подобные методы могут быть применены для исследования систем более общего типа; см., например, Е. П. Попов, О малом параметре в методе гармонической линеаризации, Известия АН СССР, Отд. техн. наук, № 1 (1955).

где, как и обычно:

$$f_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) d\vartheta,$$

$$f_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta.$$

Заметим теперь, что гармоническая слагающая напряжения

$$f_n(a) \cos(n\omega t + n\phi) \quad (n = 0, 2, 3, \dots)$$

вызывает в линейном элементе ток

$$Z^{-1}(p) f_n(a) \cos(n\omega t + n\phi).$$

Введем абсолютное значение и фазу комплексного сопротивления

$$Z(i\Omega) = R(\Omega) e^{i\varphi(\Omega)}.$$

Тогда

$$Z^{-1}(p) f_n(a) \cos(n\omega t + n\phi) = \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\omega t + n\phi - \varphi(n\omega)).$$

Таким образом, уточненный вариант формулы (7.48) будет:

$$I \approx a \cos \vartheta + \sum_{(n=0, 2, 3, \dots)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)). \quad (7.51)$$

Отсюда, между прочим, сразу вытекает критерий применимости излагаемого метода. Нам необходимо, чтобы член  $a \cos \vartheta$  был основным, а остальные лишь поправочными. Поэтому для применимости метода требуется, чтобы

$$\left| \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \right| \ll a \quad (n = 0, 2, 3, \dots).$$

Воспользуемся выражением (7.51) для уточнения формулы (7.50). Имеем:

$$V = f(a \cos \vartheta + \xi),$$

где

$$\xi = \sum_{(n=0, 2, 3, \dots)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)),$$

но так как  $\xi$  должно быть мало по сравнению с первым членом, то напряжение  $V$  будет:

$$V = f(a \cos \vartheta) + \xi f'(a \cos \vartheta).$$

Разложив теперь полученное выражение в ряд Фурье, находим:

$$V = \sum_{(n \geq 0)} f_n(a) \cos n\vartheta + \left\{ \sum_{(n \geq 1)} [\Phi_n(a) \cos n\vartheta + G_n(a) \sin n\vartheta] + \Phi_0(a) \right\}, \quad (7.52)$$

где сумма в фигурных скобках дает разложение в ряд Фурье функции  $\xi f'(a \cos \vartheta)$ .

Нас особо будут интересовать значения  $\Phi_1(a)$  и  $G_1(a)$ . Приведем поэтому соответствующие формулы:

$$\Phi_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi f'(a \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$G_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Рассматривая опять стационарные колебания, приравняем первую гармонику напряжения из разложения (7.52) первой гармонике напряжения на линейном элементе:

$$Z(i\omega) a \cos(\omega t + \psi) = R(\omega) a \cos(\omega t + \psi + \varphi(\omega)),$$

после чего находим:

$$f_1(a) \cos(\omega t + \psi) + \Phi_1(a) \cos(\omega t + \psi) + G_1(a) \sin(\omega t + \psi) = \\ = R(\omega) a \cos(\omega t + \psi + \varphi(\omega)),$$

откуда получаем уточненные уравнения гармонического баланса:

$$R(\omega) a \cos \varphi(\omega) = f_1(a) + \Phi_1(a), \\ R(\omega) a \sin \varphi(\omega) = -G_1(a),$$

или

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= \frac{f_1(a) + \Phi_1(a)}{a}, \\ Y(\omega) &= -\frac{G_1(a)}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Упростим теперь выражения для  $\Phi_1(a)$  и  $G_1(a)$ . Имеем:

$$\Phi_1(a) = \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \cos \vartheta \cos(n\vartheta - \varphi(n\omega)) d\vartheta = \\ = \frac{1}{2} \sum_{(n \neq 1)} \frac{\frac{d f_n^2(a)}{da}}{R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega),$$

$$G_1(a) = \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin(n\vartheta - \varphi(n\omega)) d\vartheta = \\ = \sum_{(n \neq 1)} \frac{f_n(a)}{R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta.$$

Но

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(a \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta = \\ = \frac{n}{a\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta = \frac{n f_n(a)}{a},$$

т. е.

$$G_1(a) = \sum_{(n \geq 2)} \frac{n f_n^2(a)}{a R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega).$$

Таким образом, уточненные уравнения гармонического баланса для стационарных колебаний будут:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= \frac{f_1(a)}{a} + \frac{1}{2} \sum_{(n=0, 2, 3, \dots)} \frac{\frac{df_n^2(a)}{da}}{a R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega), \\ Y(\omega) &= - \sum_{(n>2)} \frac{n f_n^2(a)}{a^2 R(n\omega)} \cos \varphi(n\omega). \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

Сравнивая их с уравнениями первого приближения (7.49), видим, что здесь уже отражено влияние обертонов колебаний. Полученными формулами (7.54) можно также воспользоваться для более детального выяснения пределов применимости уравнений первого приближения.

Отметим еще, что приведенные результаты можно было бы получить и методом асимптотических разложений. Для этого целесообразно представить основное уравнение колебательного процесса (7.47), например, в форме

$$\{(p^2 + \omega_0^2) Q(p) + \varepsilon S(p)\} I = \varepsilon f(I). \quad (7.55)$$

### § 8. Нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами

Рассмотрим теперь нелинейную колебательную систему, у которой некоторые параметры, например масса системы, жесткость, коэффициент трения и др., медленно изменяются со временем («медленно» по отношению к естественной единице времени — периоду собственных колебаний). В этом случае мы приходим к рассмотрению следующего нелинейного дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x = \varepsilon f \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (8.1)$$

в котором, как и ранее,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\tau = \varepsilon t$  — «медленное» время.

Построение приближенных решений уравнения (8.1) не вызывает дополнительных принципиальных затруднений и может быть осуществлено с помощью изложенного нами выше асимптотического метода. Отметим, что для построения асимптотических рядов необходимо, чтобы коэффициенты уравнения (8.1)  $m(\tau)$ ,  $k(\tau)$ , а также  $f(\tau, x, \frac{dx}{dt})$  имели достаточное число производных по  $\tau$  для всех конечных значений  $\tau$ , кроме того, для любых  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$  (только на этом интервале времени  $(0, \frac{L}{\varepsilon})$  мы будем рассматривать колебательный процесс, описываемый дифференциальным уравнением (8.1))  $k(\tau) \neq 0$ ,  $m(\tau) \neq 0$  и положительны.

Совершенно очевидно, что если в коэффициентах уравнения (8.1) считать  $\tau$  некоторым постоянным параметром, то мы получаем уравнение,

рассмотренное нами в § 1, для которого построены асимптотические формулы, учитывающие все те дополнительные явления, которые возникают в колебательной системе из-за нелинейного возмущения. При  $\tau = \varepsilon t$ , т. е. если в исследуемой нелинейной колебательной системе некоторые параметры будут изменяться со временем, хотя и медленно, естественно ожидать еще некоторых дополнительных изменений в решении, не наблюдавшихся в колебательных системах с постоянной массой, жесткостью и т. д. Такими дополнительными явлениями будут, например, зависимость «собственной» частоты от «медленного» времени и др.

Учитывая все это, естественно искать общее решение уравнения 8.1) в виде разложения:

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(\tau, a, \phi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \phi) + \dots, \quad (8.2)$$

в котором  $u_1(\tau, a, \phi)$ ,  $u_2(\tau, a, \phi), \dots$  являются периодическими функциями угла  $\phi$  с периодом  $2\pi$ , а величины  $a$  и  $\phi$  как функции времени определяются уже следующими дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \dots, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

где  $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$  — «собственная» частота рассматриваемой колебательной системы. Таким образом, как и в § 1, задача построения асимптотических приближенных решений уравнения (8.1) сводится к определению выражений для функций

$$u_1(\tau, a, \phi), u_2(\tau, a, \phi), \dots, A_1(\tau, a), A_2(\tau, a), \dots, B_1(\tau, a), B_2(\tau, a), \dots \quad (8.4)$$

и последующему интегрированию системы уравнений (8.3), определяющей амплитуду и полную фазу колебания.

Как и в § 1, для однозначного определения функций, стоящих в правых частях уравнений (8.3), необходимо наложить дополнительные условия на функции  $u_1(\tau, a, \phi)$ ,  $u_2(\tau, a, \phi), \dots$ . В качестве таких условий принимаем опять-таки условия (1.8), которые должны в данном случае выполняться для любых  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$ . После сделанных предварительных замечаний приступим к определению функций (8.4). Для этого дифференцируем правую часть выражения (8.2) с учетом уравнений (8.3) и подставляем в уравнение (8.1), правую часть которого раскладываем в ряд Тейлора. Приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m(\tau) \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega^2(\tau) u_1 \right] &= f_0(\tau, a, \phi) + 2m(\tau)\omega(\tau)A_1 \sin \phi + \\ &\quad + 2m(\tau)\omega(\tau)B_1 \cos \phi + \frac{d(m(\tau)\omega(\tau))}{d\tau} a \sin \phi, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} m(\tau) \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \omega^2(\tau) u_2 \right] &= \\ &= f_1(\tau, a, \phi) + m(\tau) \left[ 2\omega(\tau) a B_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + a B_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m(\tau)} \right] \cos \phi + \\ &\quad + m(\tau) \left[ 2\omega(\tau) A_2 + 2A_1 B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{a B_1}{m(\tau)} \right] \sin \phi, \end{aligned} \quad (8.6)$$

.....

где введены обозначения:

$$f_0(\tau, a, \psi) = f(\tau, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} f_1(\tau, a, \psi) = & f'_x(\tau, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + \\ & + f''_{x'}(\tau, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left[ A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega(\tau) \right] - \\ & - m(\tau) \left[ 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \psi} \omega(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} A_1 \omega(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega(\tau) B_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \frac{\omega(\tau)}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Далее, из уравнения (8.5), учитывая условия отсутствия первой гармоники в функции  $u_1(\tau, a, \psi)$ , находим:

$$u_1(\tau, a, \psi) = \frac{1}{2\pi k(\tau)} \sum_{n \neq \pm 1} \frac{e^{in\psi}}{1-n^2} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) e^{-in\psi} d\psi. \quad (8.9)$$

Но условие отсутствия первой гармоники в (8.9) дает нам следующие выражения для  $A_1(\tau, a)$  и  $B_1(\tau, a)$ :

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a) = & -\frac{a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \\ & -\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_1(\tau, a) = & -\frac{1}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Таким образом, в первом приближении асимптотическое решение уравнения (8.1) следует искать в форме

$$x = a \cos \psi, \quad (8.11)$$

где  $a$  и  $\psi$  должны быть определены из уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} = & -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \\ & -\frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = & \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Заметим, что по аналогии с § 7 уравнения первого приближения (8.12) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} = & -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \delta_e(\tau, a) a, \\ \frac{d\psi}{dt} = & \omega_e(\tau, a), \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

где  $\delta_e(\tau, a)$  и  $\omega_e(\tau, a)$  являются соответственно эквивалентным декрементом затухания и эквивалентной частотой, причем они отличаются

от приведенных в § 7 аналогичных выражений только наличием «медленного» времени и определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta_e(\tau, a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau) \omega(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ \omega_e^2(\tau, a) &= \omega^2(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi m(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Для построения второго приближения необходимо найти из условия отсутствия первой гармоники в функции  $u_2(\tau, a, \psi)$  выражения для  $A_2(\tau, a)$  и  $B_2(\tau, a)$ .

Исходя из уравнения (8.6), имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_2(\tau, a) &= -\frac{1}{2\omega(\tau)} \left[ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + 2A_1 B_1 + \frac{a}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} B_1 \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi m(\tau) \omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ B_2(\tau, a) &= \frac{1}{2\omega(\tau) a} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - a B_1^2 + \frac{1}{m(\tau)} \frac{dm(\tau)}{d\tau} A_1 \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi m(\tau) \omega(\tau) a} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

и следовательно, асимптотическое решение уравнения (8.1) во втором приближении будет:

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi), \quad (8.16)$$

где  $a$  и  $\phi$  должны быть определены из уравнений второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a). \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Здесь  $A_1(\tau, a)$  и  $B_1(\tau, a)$  определяются выражениями (8.10),  $A_2(\tau, a)$  и  $B_2(\tau, a)$  — выражениями (8.15), а  $u_1(\tau, a, \psi)$  — согласно формуле (8.9). Заметим, что во всех полученных формулах при интегрировании по  $\psi$  считаем  $a$  и  $\tau$  постоянными параметрами.

Сопоставляя полученные выражения для первого и второго приближения с результатами § 1, убеждаемся, что общая схема построения решений для случая колебательной системы, описываемой уравнением (8.1), будет такая же, как и в случае системы, рассматривавшейся в § 1. Полученные нами уравнения первого приближения отличаются от уравнений (1.24) наличием «медленного» времени и дополнительного слагающегося

$$-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau) \omega(\tau)} \frac{d[m(\tau) \omega(\tau)]}{d\tau}.$$

Таким образом, в первом приближении медленная изменяемость массы и коэффициента упругости, кроме нарушения гармоничности колебаний, вводит дополнительные «силы трения», знак которых будет зависеть от того, каким образом изменяются параметры исследуемой колебательной системы.

Остановимся еще на следующем обстоятельстве. При построении асимптотических приближенных решений мы сводим интегрирование одного уравнения второго порядка (8.1) к интегрированию двух уравнений первого порядка (8.12) или (8.17), которые во многих случаях не могут быть проинтегрированы в элементарных функциях, и поэтому их решения приходится искать при помощи численных методов.

Используя численные методы, можно было бы проинтегрировать непосредственно уравнение (8.1), однако это сложная задача, требующая чрезвычайно много времени и в большинстве случаев трудно выполнимая в связи с возможностью накопления большой систематической ошибки. Численное же интегрирование уравнений первого (или второго) приближения не представляет затруднений ввиду того, что в этих уравнениях переменными являются амплитуда и фаза, а не сама осциллирующая функция  $x$ . Для получения полной картины процесса здесь достаточно вычислить небольшое количество точек, расположенных на сравнительно «гладкой» кривой, что существенно упрощает численное интегрирование, в то время как при интегрировании непосредственно уравнения (8.1) нам пришлось бы находить не огибающую, а непосредственно синусоиду.

Заметим, что для составления как уравнений первого приближения (8.12), так и второго приближения (8.17) нет необходимости пользоваться формулами (8.10) или (8.15). Мы можем для составления этих уравнений, так же как и в случае уравнения (1.1), воспользоваться непосредственно уравнениями гармонического баланса, которые в нашем случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x - \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon f \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\}_{x=a \cos \psi + \dots} \cos \phi d\psi = 0, \\ & \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x - \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon f \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\}_{x=a \cos \psi + \dots} \sin \phi d\psi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Подставляя в подынтегральные выражения значения  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , найденные из (8.2) с точностью до величин первого порядка малости, с учетом, разумеется, того, что  $a$  и  $\phi$  являются функциями времени, удовлетворяющими уравнениям (8.3), и производя интегрирование, получим для  $A_1(\tau, a)$  и  $B_1(\tau, a)$  выражения (8.10). Учитывая при подстановке  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  также величины, пропорциональные  $\varepsilon^2$ , получим для  $A_2(\tau, a)$  и  $B_2(\tau, a)$  выражения (8.15).

Заметим, что при вычислении интегралов (8.18)  $\tau$ , как и  $a$ , считаем некоторым постоянным параметром и интегрирование ведем только по  $\phi$ .

Рассмотрим еще некоторые частные случаи уравнения (8.1), для которых уравнения первого приближения (8.12) принимают совсем простую форму.

Допустим, что в исследуемой колебательной системе отсутствует трение, и уравнение, описывающее движение, имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + c(\tau) x = \varepsilon f(\tau, x). \quad (8.19)$$

В этом случае уравнениями первого приближения будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)a} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Система уравнений (8.20) может быть проинтегрирована до конца. Действительно, из первого уравнения находим:

$$a = \frac{a_0}{[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}}, \quad (8.21)$$

где  $a_0$  — начальное значение амплитуды при  $t = 0$ . Подставляя найденное значение амплитуды во второе уравнение системы (8.20), получим:

$$\psi = \int_0^t \omega_e(\tau) dt, \quad (8.22)$$

где

$$\omega_e(\tau) = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi [m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2} a_0} \int_0^{2\pi} f_0 \left( \tau, \frac{a_0}{[m(\tau)\omega(\tau)]^{1/2}}, \psi \right) \cos \psi d\psi. \quad (8.23)$$

Таким образом, в первом приближении колебания, описываемые уравнением (8.19), будут «синусоидальными» с амплитудой, обратно пропорциональной  $\sqrt{m(\tau)\omega(\tau)}$ , и фазой, изменяющейся согласно формуле (8.22).

В качестве второго частного случая рассмотрим систему с медленно меняющейся массой  $m(\tau)$ , находящуюся под воздействием линейной упругой силы  $k(\tau)x$  с медленно меняющимся коэффициентом упругости и нелинейного трения, зависящего от скорости и «медленного» времени. Колебания этой системы описываются уравнением

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x = \varepsilon f \left( \tau, \frac{dx}{dt} \right). \quad (8.24)$$

В этом случае уравнения первого приближения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)\omega(\tau)} \frac{d[m(\tau)\omega(\tau)]}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)\omega(\tau)} \int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Из второго уравнения сразу находим закон изменения полной фазы колебания

$$\psi = \int_0^t \omega(\tau) dt, \quad (8.26)$$

Из системы (8.25) следует, что частота колебания, описываемого уравнением (8.24), в первом приближении не зависит от амплитуды, а зависит только от характера медленного изменения коэффициентов  $m(\tau)$  и  $k(\tau)$ .

В качестве примера рассмотрим колебания математического маятника постоянной массы (в случае переменной массы дополнительных затруднений не возникает) при наличии малого затухания, пропорционального первой степени скорости, и медленного изменения длины. К подобной схеме приводятся многочисленные задачи практики. Обозначая  $\theta$  угол отклонения маятника от вертикального положения,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $m$  — массу маятника,  $l = l(\tau)$  — медленно изменяющуюся длину,  $2n$  — коэффициент трения, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[ m l^2(\tau) \frac{d\theta}{dt} \right] + 2n \frac{d}{dt} [l(\tau) \theta] + m g l(\tau) \sin \theta = 0. \quad (8.27)$$

Для небольших отклонений мы можем  $\sin \theta$  заменить первыми двумя членами разложения в степенной ряд, после чего уравнение (8.27) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left[ m l^2(\tau) \frac{d\theta}{dt} \right] + m g l(\tau) \theta = \varepsilon f \left( \tau, \theta, \frac{d\theta}{dt} \right), \quad (8.28)$$

в котором

$$\varepsilon f \left( \tau, \theta, \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{m g l(\tau)}{6} \theta^3 - 2 n l(\tau) \frac{d\theta}{dt} - 2 \varepsilon n \frac{dl(\tau)}{d\tau} \theta. \quad (8.29)$$

В первом приближении согласно (8.11) и (8.12) имеем:

$$\theta = a \cos \phi, \quad (8.30)$$

где  $a$  и  $\phi$  должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= - \frac{na}{ml(\tau)} - \frac{3\varepsilon l'(\tau)}{4l(\tau)} a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{\omega(\tau) a^2}{16}, \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

где  $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}}$ .

Интегрируя первое уравнение системы (8.31) при начальных значениях  $t = 0$ ,  $a = a_0$ , получаем выражение для  $a$ :

$$a = a_0 e^{-\frac{n}{m} \int_0^t \frac{dt}{l(\zeta)}} \left( \frac{l(0)}{l(\tau)} \right)^{3/4}. \quad (8.32)$$

Подставляя это значение  $a$  во второе уравнение системы (8.31), найдем:

$$\psi = \int_0^t \omega(\tau) \left( 1 - \frac{a_0^2 e^{-\frac{2n}{m} \int_0^t \frac{dt}{l(\zeta)}} \left( \frac{l(0)}{l(\tau)} \right)^{3/2}}{16} \right) dt. \quad (8.33)$$

Формулы (8.32) и (8.33) дают возможность построить график зависимости амплитуды и фазы от времени при медленном изменении длины маятника по произвольному закону.

Если в этих формулах положить  $l = \text{const}$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 e^{-\frac{\lambda}{2} t}, \\ \psi &= \omega \left( t + \frac{a_0^2 (e^{-\lambda t} - 1)}{16\lambda} \right) + \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

где  $\lambda = \frac{2n}{ml}$ ,  $\varphi$  — начальное значение фазы.

Последние формулы совпадают с ранее найденными выражениями (2.44).

Допустим теперь, что длина маятника изменяется по линейному закону  $l(\tau) = l_0 + l_1 \tau$ ;  $l_0$  — значение длины при  $t = 0$ ,  $l_1$  — скорость изменения длины маятника (для малого интервала времени всегда можно предположить с достаточной степенью точности, что длина изменяется по линейному закону). В этом случае для амплитуды и фазы имеем выражения:

$$a = a_0 \left( \frac{l_0}{l_0 + l_1 \tau} \right)^{\frac{3}{4} + \frac{n}{ml_1 \varepsilon}}, \quad (8.35)$$

$$\psi = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l_0 + l_1 \tau}} \left[ 1 - \frac{a_0^2}{16} \left( \frac{l_0}{l_0 + l_1 \tau} \right)^{\frac{3}{2} + \frac{2n}{ml_1 \varepsilon}} \right] dt. \quad (8.36)$$

Согласно формуле (8.35) амплитуда колебаний при медленном изменении длины маятника будет изменяться не по экспоненциальному закону, как при обычном линейном трении, а обратно пропорционально некоторой степенной функции времени. При этом очевидно, что при  $n < 0$ ,  $l_1 > 0$  и  $\left| \frac{n}{ml_1 \varepsilon} \right| < \frac{3}{4}$ , а также при  $n > 0$  и  $l_1 > 0$  колебания затухают.

Таким образом, медленное увеличение длины маятника, как и следовало ожидать, способствует затуханию колебаний. Если  $l_1 < 0$ ,  $n > 0$  и  $\left| \frac{n}{l_1 m \varepsilon} \right| < \frac{3}{4}$ , то амплитуда возрастает, а при  $\left| \frac{n}{l_1 m \varepsilon} \right| > \frac{3}{4}$  — убывает. При  $l_1 < 0$  и  $n < 0$  амплитуда возрастает. При отсутствии затухания ( $n = 0$ ) амплитуда колебаний возрастает с уменьшением длины и убывает с увеличением длины.

Аналогичный анализ может быть проведен и для частоты колебаний. Так, например, при отсутствии затухания мгновенная частота уменьшается при увеличении длины маятника и увеличивается при уменьшении длины.

Подсчитаем для данного примера колебаний маятника с медленно меняющейся длиной второе приближение.

Согласно формулам (8.16), (8.9) и (8.17) после ряда выкладок имеем:

$$\theta = a \cos \phi - \frac{a^3}{192} \cos 3\phi, \quad (8.37)$$

где  $a$  и  $\phi$  должны быть определены из системы уравнений второго

приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\left( \frac{3l'(\tau)}{4l(\tau)} \varepsilon + \frac{n}{ml(\tau)} \right) \left( a + \frac{a^3}{16} \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{\omega(\tau) a^2}{16} + \frac{1}{2\omega(\tau)} \left\{ \frac{n^2}{m^2 l^2(\tau)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon l'(\tau) n}{ml^2(\tau)} + \frac{5\varepsilon^2 l''(\tau)}{4l(\tau)} + \frac{5\omega^2(\tau) a^4}{2^9 \cdot 3} - \frac{3\varepsilon^2 l'^2(\tau)}{16l^2(\tau)} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

которые тоже могут быть проинтегрированы до конца. Так, из первого уравнения системы (8.38) получаем следующее соотношение между  $a$  и  $t$ :

$$\frac{a}{\sqrt{16+a^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{16+a_0^2}} e^{-\frac{n}{m} \int_0^t \frac{dl}{l(\tau)}} \left( \frac{l(0)}{l(\tau)} \right)^{3/4}, \quad (8.39)$$

после чего можем проинтегрировать также и второе уравнение системы (8.38).

---

## ГЛАВА II

### МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

#### § 9. Траектории на фазовой плоскости. Особые точки

Излагавшиеся ранее асимптотические методы ограничены в своем применении требованием наличия в уравнении малого параметра. Однако во многих случаях нам приходится иметь дело с уравнениями более общего типа, к которым эти методы неприменимы.

Если уравнения, описывающие движение исследуемой динамической системы, могут быть приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (9.1)$$

то для них можно применить качественные методы исследования. К уравнениям типа (9.1) сводятся все те уравнения, которые были рассмотрены ранее. Кроме того, как увидим далее, при исследовании колебательных систем слабо нелинейных, но находящихся под воздействием внешних периодических сил в качестве уравнений первого приближения получим также уравнения типа (9.1).

Для качественного исследования решений уравнений (9.1) целесообразно рассматривать  $x, y$  как координаты точки на плоскости. Эта плоскость, как известно, называется фазовой плоскостью, а точка  $x, y$  — фазовой точкой. Движение  $x = x(t), y = y(t)$  совершается по некоторой линии, которая называется фазовой траекторией. Построение фазовой траектории для данной системы означает построение кривой, выражающей для заданного движения зависимость скорости от смещения.

Фазовая плоскость с имеющимися на ней фазовыми траекториями дает возможность сразу увидеть всю совокупность движений, могущих возникнуть в рассматриваемой динамической системе.

Для построения фазовых траекторий необходимо найти решение системы уравнений (9.1)  $x = x(t), y = y(t)$ , представляющее собой уравнение фазовой траектории в параметрической форме, либо найти характеристики, т. е. интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (9.2)$$

дающие непосредственно зависимость между  $x$  и  $y$ .

Остановимся сначала на простейших случаях.

Рассмотрим уравнение линейного вибратора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (9.3)$$

Полагая

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

приводим уравнение (9.3) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2hy - kx, \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Преимущество, что трение невелико, т. е.  $h^2 < k$ ,  $k > 0$ ; тогда решение системы (9.4) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y &= -a\omega e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha + \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

где  $\omega_1^2 = k - h^2$ ,  $\vartheta = \arctg \frac{h}{\omega_1}$ ,  $a$  и  $\alpha$  — произвольные постоянные, определяющиеся начальными значениями.

Выражения (9.5) представляют собой уравнения фазовой траектории в параметрической форме. При их помощи не представляет затруднений проанализировать характер движения фазовой точки на фазовой плоскости.

Заметим, что система (9.4) определяет в каждой точке фазовой плоскости единственную касательную к интегральной кривой, за исключением точек  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Наклон касательной определяется выражением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - kx}{y}. \quad (9.6)$$

В точке  $x = 0$ ,  $y = 0$  направление касательной становится непредetermined. Такие точки носят название критических или особых точек. Для простейших особых точек (особых точек первого порядка, или элементарных точек) через особую точку либо не проходит ни одной, либо проходит больше чем одна интегральная кривая.

Допустим сначала, что  $h = 0$ . Тогда решения (9.5) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= -a\omega \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

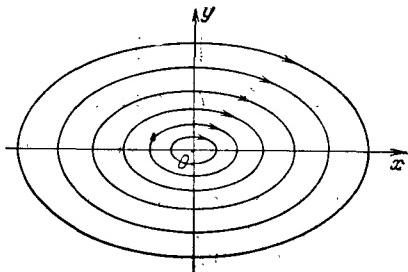


Рис. 41.

На фазовой плоскости получаем семейство подобных эллипсов (рис. 41), причем через каждую точку фазовой плоскости проходит только один эллипс, соответствующий определенным начальным условиям.

Исключая из выражений (9.7) время  $t$ , получаем уравнение семейства эллипсов в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \omega^2} = 1, \quad (9.8)$$

которое мы могли бы также получить, интегрируя непосредственно уравнение (9.6) при  $h = 0$ .

Через начало координат не проходит ни одной интегральной кривой. Такая особая точка, вблизи которой интегральные кривые замкнуты и охватывают особую точку, называется центром.

Так как в данном случае все фазовые траектории являются замкнутыми кривыми, эллипсами (за исключением траектории, выродившейся в точку  $x=0, y=0$ ), то движение будет периодическим.

Особой точке  $x=0, y=0$  соответствует состояние равновесия в рассматриваемой колебательной системе.

Совершенно ясно, что и в общем случае уравнений (9.1) состояниям равновесия системы соответствуют на фазовой плоскости точки, для которых одновременно  $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ , т. е. особые точки уравнений (9.2).

Периодическим же движениям, происходящим в системе, на фазовой плоскости соответствуют замкнутые фазовые траектории уравнения (9.2).

В дальнейшем нам придется пользоваться понятием устойчивости состояния равновесия.

Приведем здесь только определение, не вдаваясь в детали. Состояние равновесия является устойчивым, если при любой заданной области допустимых отклонений от состояния равновесия (область  $\eta$ ) мы можем указать область  $\delta(\eta)$ , окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одно движение, начинаяющееся внутри  $\delta(\eta)$ , никогда не покинет области  $\eta$  (рис. 42).

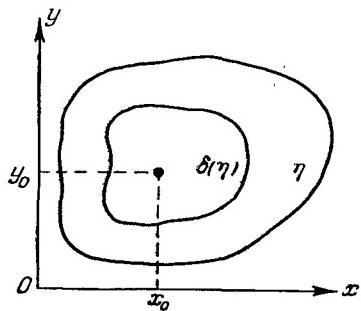


Рис. 42.

Аналитически это определение устойчивости может быть выражено следующим образом: состояние равновесия  $x=x_0, y=y_0$  называется устойчивым, если для любого наперед заданного, сколь угодно малого  $\eta$  можно найти такое  $\delta(\eta)$ , что если для  $t=t_0$

$$|x(t_0) - x_0| < \delta(\eta), \quad |y(t_0) - y_0| < \delta(\eta),$$

то и для любых  $t$ , таких, что  $t_0 < t < \infty$ ,

$$|x(t) - x_0| < \eta, \quad |y(t) - y_0| < \eta.$$

Нетрудно видеть, что состояние равновесия типа центра является устойчивым состоянием равновесия.

Пусть теперь  $h > 0$ , что соответствует затухающему колебательному процессу. В этом случае получаем согласно выражению (9.5) на фазовой плоскости семейство спиралей, для которых начало координат является асимптотической точкой (рис. 43), причем чем меньше отношение  $\frac{h}{\omega_1}$ , т. е. чем меньше трение, тем ближе в течение одного оборота спираль к эллипсу.

Фазовая скорость в данном случае нигде, за исключением начала координат, не обращается в нуль, но непрерывно уменьшается по мере приближения изображающей точки к началу координат.

Фазовые траектории соответствуют в данном случае осцилирующим, но затухающим движениям, а особая точка  $x=0, y=0$  соответствует состоянию равновесия.

Рассматриваемая в данном случае особая точка, являющаяся асимптотической точкой всех интегральных кривых, имеющих вид спиралей, называется фокусом, причем при  $h > 0$  фокус будет устойчивым.

Пусть теперь  $h < 0$ . В этом случае мы опять получаем семейство спиралей (рис. 44), однако фазовая точка с течением времени будет удаляться от начала координат. Скорость движения изображающей точки по интегральной кривой, обращаясь в нуль при  $x = 0, y = 0$ , монотонно возрастает по мере удаления точки от начала координат. В данном случае положение равновесия неустойчиво, и особая точка  $x = 0, y = 0$  представляет собой неустойчивый фокус.

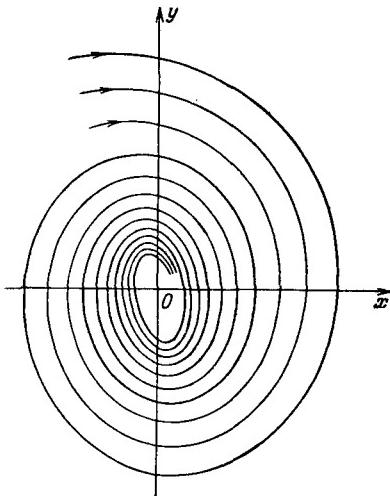


Рис. 43.

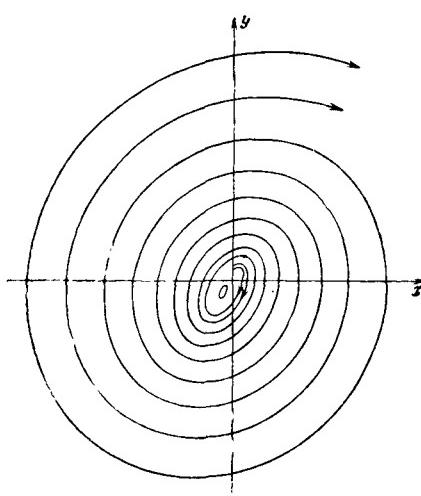


Рис. 44.

Рассмотрим теперь случай, когда  $h^2 > k$ , что соответствует при  $h > 0$  затухающему апериодическому процессу. В этом случае решение системы (9.4) можно представить в виде

$$x = C_1 e^{-q_1 t} + C_2 e^{-q_2 t}, \quad (9.9)$$

$$y = -C_1 q_1 e^{-q_1 t} - C_2 q_2 e^{-q_2 t}, \quad (9.10)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} -q_1 &= -h + \sqrt{h^2 - k}, \\ -q_2 &= -h - \sqrt{h^2 - k}. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Для получения картины на фазовой плоскости умножим выражение (9.9) сначала на  $q_1$ , затем на  $q_2$  и сложим с (9.10). Возводя полученные результаты соответственно в степени  $q_1$  и  $q_2$ , находим:

$$(y + q_1 x)^{q_1} = C (y + q_2 x)^{q_2} \quad (9.12)$$

или

$$y + q_1 x = C (y + q_2 x)^{\frac{q_2}{q_1}}. \quad (9.13)$$

На фазовой плоскости получаем семейство деформированных парабол (рис. 45), касающихся прямой  $y = -q_1 x$  в начале координат. Нетрудно установить направление движения изображающей точки по интегральным кривым. Изображающая точка будет двигаться по интегральным кривым

в направлении, указанном на рис. 45 стрелками, т. е. всегда будет приближаться к началу координат.

Точка  $x=0, y=0$  будет особой точкой, причем все интегральные кривые проходят через нее. Особая точка такого типа называется узлом. В рассматриваемом случае положение равновесия будет устойчивым, и этому положению соответствует устойчивый узел.

Рассмотрим теперь характер интегральных кривых на фазовой плоскости для случая большого отрицательного трения  $h < 0$ ,  $h^2 > k$ . В этом случае, воспользовавшись (9.13), получаем на фазовой плоскости семейство кривых параболического типа (рис. 46) с особой точкой тоже типа узла.

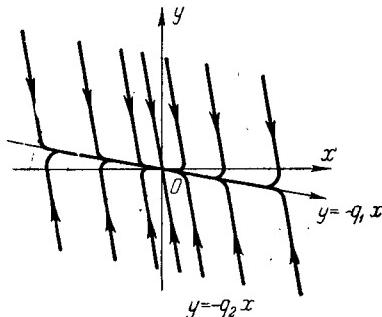


Рис. 45.

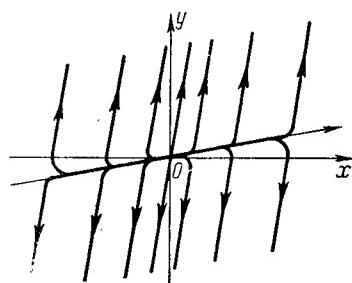


Рис. 46.

Однако, анализируя движение изображающей точки, легко убедиться, что изображающая точка при движении по любой из интегральных кривых стремится уйти от состояния равновесия (см. рис. 46, на котором направление движения указано стрелками). Таким образом, рассматриваемая особая точка представляет собой неустойчивый узел, причем, как и выше, неустойчивость обусловлена тем, что  $h < 0$ . Заметим, что неустойчивость очевидна непосредственно из рассмотрения выражений (9.9) и (9.10).

Для полноты изложения приведем еще один тип фазовых траекторий, с которыми встретимся при дальнейшем изложении. Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0, \quad (9.14)$$

где  $k$  положительно. Уравнение вида (9.14) получаем, рассматривая, например, малые отклонения маятника около верхнего положения неустойчивого равновесия.

Решение уравнения (9.14) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}, \\ y &= C_1 \sqrt{k} e^{\sqrt{k}t} - C_2 \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

При помощи этих соотношений не представляет затруднений построить фазовые траектории. Действительно, согласно (9.15) легко получить соотношение

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{Ck} = 1, \quad (9.16)$$

представляющее собой уравнение семейства гипербол (рис. 47). При  $C=0$  мы получаем две асимптоты этого семейства гипербол, проходящие

через начало координат:

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{kx}, \\ x = -\sqrt{kx}. \end{array} \right\} \quad (9.17)$$

Начало координат является единственной особой точкой, причем, за исключением асимптот, ни одна интегральная кривая не проходит через начало координат. Такая особая точка называется особой точкой типа седла.

Рассматривая направление движения изображающей точки на фазовой плоскости, приходим к выводу, что где бы ни находилась изображающая точка в начальный момент (за исключением начала координат и асимптоты  $y = -\sqrt{kx}$ ), она всегда, в конце концов, будет удаляться от начала координат, причем движение будет носить апериодический характер, а не колебательный. Положение равновесия, соответствующее особой точке типа седла, всегда будет неустойчивым ввиду того, что движение по асимптоте  $y = -\sqrt{kx}$  не может быть никогда точно реализовано, так как вероятность начального состояния, соответствующего движению к особой точке, равна нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Прежде всего займемся изучением точек равновесия — особых точек уравнения (9.2), в которых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0. \quad (9.18)$$

Пусть  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — вещественные аналитические функции. Предположим, что точки равновесия, т. е. решения уравнений (9.18), изолированы и, таким образом, число особых точек в любой ограниченной области конечно.

Тогда для анализа поведения динамической системы в окрестности данной особой точки  $x = x_0, y = y_0$  положим

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y. \quad (9.19)$$

Не нарушая формы уравнений (9.1), можем принять особую точку  $x = x_0, y = y_0$  за начало координат. Тогда, подставляя (9.19) в уравнения (9.1), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = cx + dy + P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = ax + by + Q_2(x, y), \end{array} \right\} \quad (9.20)$$

где для упрощения записи вариации  $\delta x, \delta y$  заменены через  $x$  и  $y$  и введены обозначения:

$$c = P'_x(0, 0), \quad d = P'_y(0, 0), \quad a = Q'_x(0, 0), \quad b = Q'_y(0, 0),$$

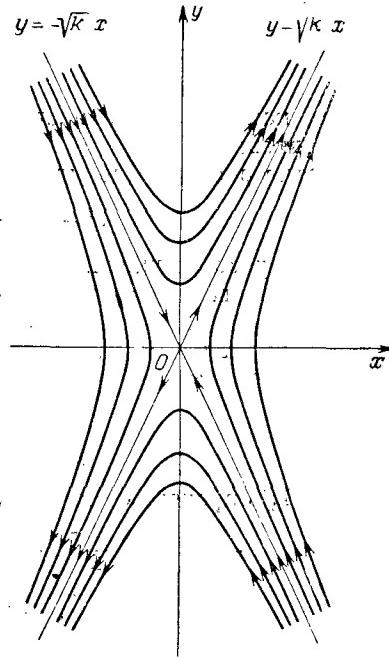


Рис. 47.

а  $P_2(x, y)$  и  $Q_2(x, y)$  — функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно и обращающиеся в начале координат в нуль вместе со своими частными производными первого порядка.

Пренебрегая в уравнениях (9.20) членами высшего порядка по отношению к малым отклонениям от точки равновесия, получаем следующую систему с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

которая, как известно, называется «уравнениями в вариациях» около точки равновесия.

Характеристическое уравнение системы (9.21) будет:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ad - bc) = 0. \quad (9.22)$$

Будем рассматривать только случаи, когда характеристические корни  $\lambda_1, \lambda_2$  не равны нулю и, следовательно,  $ad - bc \neq 0$ . Соответствующие критические точки называются особыми точками первого порядка или элементарными точками.

Решение системы уравнений (9.21) будет:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1 x_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 x_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} [b + c + \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} [b + c - \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}], \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

а  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения

$$d\lambda^2 + (b - c)\lambda - a = 0. \quad (9.25)$$

Анализируя правые части выражений (9.24), нетрудно установить, при каких соотношениях между коэффициентами уравнений (9.21)  $a, b, c, d$  правые части (9.23) стремятся к нулю или остаются ограниченными при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно, соответствующая критическая точка будет устойчивой.

Для того чтобы критическая точка была устойчива, необходимо, чтобы  $b + c < 0$  при  $(b - c)^2 + 4ad \leq 0$ ; в случае, если  $(b - c)^2 + 4ad > 0$ , то для устойчивости необходимо также, чтобы  $ad - bc < 0$ , в противном случае критическая точка будет неустойчива.

Если  $b + c = 0$ , то для устойчивости необходимо, чтобы  $(b - c)^2 + 4ad < 0$ .

В случае, если  $b + c > 0$ , критическая точка будет всегда неустойчива.

Если  $ad - bc \neq 0$ , то характер критической точки уравнений (9.1) по существу определяется характером ее первого приближения (за исключением случая, когда  $b + c = 0$ ), т. е. характером решения системы (9.21), полученной при замене  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  их членами первого порядка.

Совершенно очевидно, что присутствие отброшенных нами членов высшего порядка не изменит характера движения в окрестности точки равновесия в случае, если  $\operatorname{Re}[\lambda_1, \lambda_2] \neq 0$ , поскольку ясно, что отброшенные члены могут вызвать лишь малые добавки к «эффективным» значениям декремента затухания. В случае, если  $\operatorname{Re}[\lambda_1] = 0$  или  $\operatorname{Re}[\lambda_2] = 0$ , то малые отброшенные члены могут повлиять на характер движения, поскольку его устойчивость как раз и будет определяться этими малыми добавками.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 + x = 0, \quad (9.26)$$

которое можно записать в виде

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = -\lambda y^3 - x, \\ \frac{dx}{dt} = y. \end{array} \right\} \quad (9.27)$$

Для исследования характера точки равновесия  $x = 0, y = 0$  получаем уравнения в вариациях

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = -x, \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{array} \right\} \quad (9.28)$$

согласно которым точка равновесия  $x = 0, y = 0$  устойчива, так как  $b + c = 0, 4ad = -4 < 0$ .

Как видно, для уравнений (9.27) характер движения меняется, так как наличие в уравнении (9.26) члена  $\lambda \left( \frac{dx}{dt} \right)^3$  приведет к затуханию колебаний или к неограниченному возрастанию, в зависимости от того, будет ли  $\lambda$  положительна или отрицательна.

Приведем здесь теорему, являющуюся весьма частным случаем теоремы Ляпунова.

Пусть в уравнениях (9.20)  $P_2(x, y)$  и  $Q_2(x, y)$  — функции, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки  $x = 0, y = 0$ . Пусть в этой точке  $P_2(x, y)$  и  $Q_2(x, y)$  со своими частными производными первого порядка обращаются в нуль.

Тогда, если для соответствующей системы «первого приближения» (9.21) вещественные части корней характеристического уравнения (9.22) отрицательны, тривиальное решение  $x = 0, y = 0$  системы (9.20) устойчиво по Ляпунову.

Больше того, все решения системы (9.20), исходящие из начальных точек, достаточно близких к  $(0, 0)$ , будут асимптотически приближаться к тривиальному решению при  $t \rightarrow +\infty$ .

Доказательство этого утверждения весьма просто можно получить следующим путем.

Пусть

$$\left. \begin{array}{l} x = U_{11}(t), \quad y = U_{21}(t), \\ x = U_{12}(t), \quad y = U_{22}(t) \end{array} \right\} \quad (9.29)$$

будут решениями уравнений первого приближения при начальных условиях:

$$\begin{aligned} U_{11}(0) &= 1, \quad U_{21}(0) = 0, \\ U_{12}(0) &= 0, \quad U_{22}(0) = 1. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно заметить, что уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + F_2(t). \end{aligned}$$

интегрируются с помощью квадратур:

$$\begin{aligned} x &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{12}(t-\tau)F_2(\tau)\} d\tau, \\ y &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)F_1(\tau) + U_{22}(t-\tau)F_2(\tau)\} d\tau. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими формулами для уравнений (9.20), получим:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= U_{11}(t)x(0) + \int_0^t \{U_{11}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + \\ &\quad + U_{12}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\} d\tau, \\ y(t) &= U_{22}(t)y(0) + \int_0^t \{U_{21}(t-\tau)P_2(x(\tau), y(\tau)) + \\ &\quad + U_{22}(t-\tau)Q_2(x(\tau), y(\tau))\} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Мы заменили тем самым систему дифференциальных уравнений (9.20) системой интегральных уравнений.

Подчеркнем, что ввиду того, что вещественные части корней характеристического уравнения (9.22), по предположению, отрицательны, функции  $U_{ab}(t)$  будут экспоненциально затухать, так что можно написать:

$$|U_{ab}(t)| \leq ke^{-at}, \quad (9.31)$$

где  $k$  и  $a$  — положительные постоянные.

Будем исследовать интегральные уравнения (9.30) с помощью обычного метода последовательных приближений.

Воспользовавшись оценкой (9.31), найдем, что при достаточно малых начальных значениях  $x(0)$ ,  $y(0)$ :

- 1)  $|x_n(t)| \leq Ce^{-at}$ ,  $|y_n(t)| \leq Ce^{-at}$ ,  $C$  — постоянная, не зависящая от  $n$ .
- 2)  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$  сходятся к решениям  $x(t)$ ,  $y(t)$  равномерно для всех  $t$  на интервале  $(0, \infty)$ .

Отсюда и вытекает, что  $x(t)$ ,  $y(t)$  будут стремиться к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

Перейдем теперь к анализу характера критических точек на фазовой плоскости.

Для этого надо рассмотреть поведение характеристик в окрестности особой точки.

Уравнение характеристик в параметрической форме дано выражениями (9.23), согласно которым не представляет затруднений построить интегральные кривые и проанализировать их характер в зависимости от соотношений между коэффициентами  $a, b, c, d$ .

Рассмотрим различные случаи.

Пусть  $(b - c)^2 + 4ad < 0$ ; в этом случае правые части выражений (9.23) имеют колебательный характер. Если  $b + c = 0$ , то в окрестности критической точки характеристикиками является семейство подобных эллипсов, охватывающих особую точку, которая в данном случае будет особой точкой типа центра. Если  $b + c \neq 0$ , то характеристики представляют собой семейство спиралей, для которых асимптотической точкой является критическая точка типа фокуса, причем в случае, если  $b + c < 0$ , характеристики стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ , и фокус будет являться устойчивой особой точкой; если  $b + c > 0$ , то характеристики будут стремиться к началу координат при  $t \rightarrow -\infty$ ; в этом случае фокус будет неустойчивой особой точкой.

Пусть  $(b - c)^2 + 4ad = 0$ . Тогда, исключая из выражений (9.23) время, получим уравнение характеристик на фазовой плоскости в окрестности критической точки в виде

$$y - \lambda_1 x = c (y - \lambda_2 x)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (9.32)$$

Последнее выражение, как уже указывалось выше, представляет собой уравнение семейства парабол или семейства гипербол в зависимости от знака показателя степени  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ . Если  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ , то (9.32) представляет собой уравнение семейства парабол. Таким образом, если  $ad - bc < 0$ , критическая точка является узлом, устойчивость которого зависит от знака выражения  $b + c$ .

В случае, если  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ , что будет при  $ad - bc > 0$ , то (9.32) является уравнением семейства гипербол и критическая точка является особой точкой типа седла.

Рассмотрим теперь случай, когда  $(b - c)^2 + 4ad = 0$  и когда, следовательно, корни характеристического уравнения (9.22) равны и вещественны:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(b + c)$ .

Тогда, если  $a = d = 0, b = c = \lambda$ , согласно уравнению (9.24) получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (9.33)$$

и уравнение характеристик  $y = cx$  представляет собой уравнение семейства прямых, проходящих через начало координат. Особая точка  $x = 0, y = 0$  в этом случае тоже называется узлом.

В общем же случае необходимо в уравнениях (9.24) сделать замены переменных согласно формулам:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2} y, \\ \eta &= y. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Тогда, после исключения времени  $t$ , получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{C}, \quad (9.35)$$

решение которого

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \xi \ln \xi + C\xi \quad (9.36)$$

представляет собой совокупность кривых, проходящих через особую точку и представленных на рис. 48. Особая точка опять является узлом,

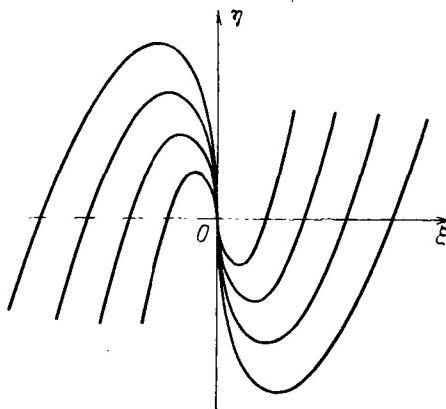


Рис. 48.

причем узел будет устойчивым при  $b+c < 0$  и неустойчивым при  $b+c > 0$ .

Результаты проведенного рассмотрения даны в табл. 5

Таблица 5

1	$(b-c)^2+4ad < 0$	$b+c \neq 0$ фокус $b+c=0$ центр	$b+c < 0$ устойчивый фокус $b+c > 0$ неустойчивый фокус
2	$(b-c)^2+4ad=0$	узел	$b+c < 0$ устойчивый узел $b+c > 0$ неустойчивый узел
3	$(b-c)^2+4ad > 0$	$ad-bc < 0$ узел $ad-bc > 0$ седло	$b+c < 0$ устойчивый узел $b+c > 0$ неустойчивый узел

Перейдем теперь от локального исследования характера движения вблизи особых точек к исследованию поведения интегральных кривых на всей фазовой плоскости.

Для получения ориентировочного представления о возможном характере поведения интегральных кривых на фазовой плоскости рассмотрим вначале приближенное решение уравнения (1.1), описывающего колебания системы с малой нелинейностью:

$$x = a \cos \phi + \varepsilon \dots, \quad y = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \phi + \varepsilon \dots, \quad (9.37)$$

где амплитуда колебаний  $a$  и фаза  $\phi$  определяются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta(a)a, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

Выражения (9.37) представляют собой уравнения фазовых траекторий в параметрической форме. Поведение этих фазовых траекторий будет зависеть от корней уравнения

$$\Phi(a) = a\delta(a) = 0, \quad (9.39)$$

соответствующих стационарному режиму в колебательной системе, а также от знака функции  $\Phi'_a(a)$ .

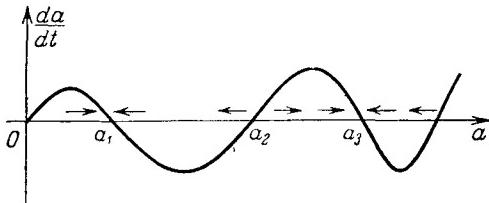


Рис. 49.

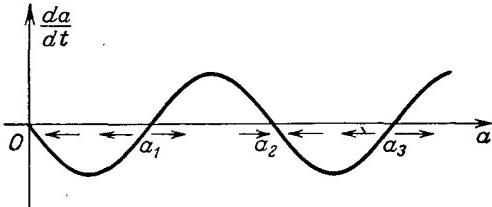


Рис. 50.

Тривиальный корень  $a = 0$  соответствует, очевидно, состоянию равновесия.

Пусть уравнение (9.39) имеет ряд корней, для которых  $\Phi'_a(a) \neq 0$ . Тогда мы получаем положение, изображенное на графиках типа рис. 49 или 50.

Очевидно, что в первом случае  $a_1$  и  $a_3$  являются корнями уравнения (9.39), соответствующими устойчивому стационарному режиму в колебательной системе, а  $a_2$  соответствует неустойчивому режиму,  $a = 0$  является неустойчивым состоянием равновесия. Во втором случае  $a = 0$  будет устойчивым положением равновесия,  $a_1$  и  $a_3$  соответствуют неустойчивому стационарному режиму, а  $a_2$  — устойчивому стационарному режиму.

Переходя к фазовой плоскости, мы получим точку равновесия и ряд замкнутых кривых, близких к эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \omega^2} = 1 \quad (a = a_1, a_2, a_3, \dots). \quad (9.40)$$

На рис. 51 и 52 приведена картина на фазовой плоскости соответствен-но для двух рассмотренных выше типов корней уравнения (9.39).

Таким образом, на фазовой плоскости мы получили особую точку, соответствующую нулевому корню, и замкнутые траектории, соответствую-

щие корням уравнения (9.39)  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Все остальные фазовые траектории будут асимптотически стремиться к этим замкнутым траекториям при  $t \rightarrow \infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ .

В данном случае фазовая плоскость разделена на ряд полос, целиком заполненных интегральными кривыми, асимптотически приближающимися

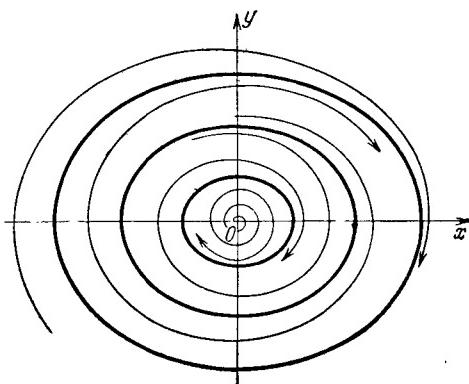


Рис. 51.

к некоторой замкнутой интегральной кривой, которая называется предельным циклом, или к точке равновесия. Предельный цикл будет устойчив, если все интегральные кривые полосы достигают его при  $t \rightarrow \infty$ , и неустойчив, если они достигают его при  $t \rightarrow -\infty$ .

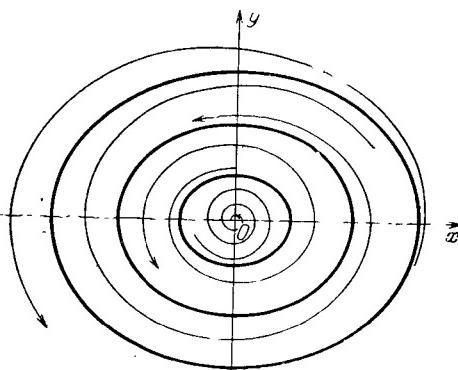


Рис. 52.

Заметим, что в случае, если колебательная система консервативна, то  $\Phi(a) \equiv 0$ ,

и в системе возможен стационарный периодический режим с произвольной амплитудой, зависящей только от начальных значений.

Этому случаю на фазовой плоскости соответствует семейство замкнутых циклов, окружающих особую точку типа центр (рис. 53).

Разумеется, приведенное нами рассуждение не является строгим и, самое главное, оно относится лишь к частному случаю систем, близких к линейному гармоническому вибратору, для которых возможна только одна особая точка.

Общий случай системы (9.1) был исследован Пуанкаре с помощью строгих качественных методов, причем в результате получается картина поведения траекторий на фазовой плоскости, являющаяся естественным обобщением приведенной выше.

Предположим, что система (9.1) описывает некоторый колебательный процесс. Этим самым мы исключаем из рассмотрения случай, когда на фазовой плоскости могут существовать траектории, уходящие в бесконечность.

Тогда на фазовой плоскости имеем особые точки, замкнутые траектории и сепараторы — интегральные кривые, проходящие через особую точку типа седла. Сепараторы играют особую роль, так как она разделяет фазовую плоскость на ряд областей, заполненных траекториями различных типов (рис. 54).

Любая незамкнутая интегральная кривая или навивается на предельный цикл, или приближается к одной или ряду особых точек.

Замкнутые циклы могут образовывать как непрерывное семейство, так и дискретное.

Картина, при которой циклы образуют непрерывное семейство с особой точкой внутри типа центра, с физической точки зрения типична для консервативных систем.

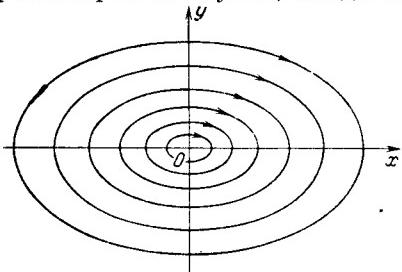


Рис. 53.

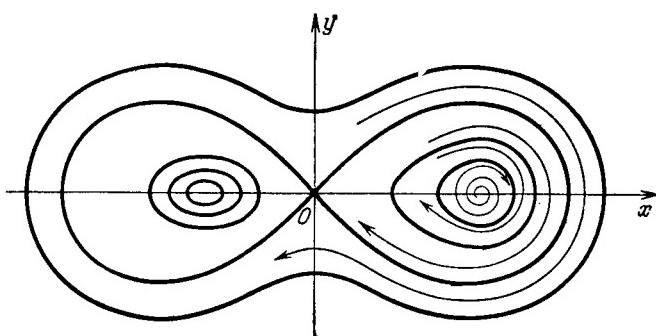


Рис. 54.

В случае, если циклы образуют дискретное семейство, то они заключены в полосы, причем все интегральные кривые, заключенные в такой полосе, асимптотически стремятся к циклу, являющемуся в данном случае предельным. Если приближение к данному циклу совершается при  $t \rightarrow \infty$ , мы говорим об устойчивом предельном цикле. Если это приближение имеет место при  $t \rightarrow -\infty$ , то естественно говорить о неустойчивом цикле.

Такая картина характерна для автоколебательных систем. Предельные устойчивые циклы изображают стационарные режимы автоколебаний, причем совершенно очевидна независимость стационарного режима в автоколебательной системе от начальных условий, лежащих в известных пределах. Разумеется, в случае наличия нескольких предельных циклов при существенном изменении начальных значений возможна переброска с одного предельного цикла на другой.

Приведенная картина поведения траекторий на фазовой плоскости очень наглядна, однако она с большим трудом поддается детализации при решении конкретных примеров.

До сих пор не существует достаточно общих теоретических методов для решения вопроса о существовании предельных циклов и определения места их расположения, за исключением случая систем, близких к линейным ( $\varepsilon \ll 1$ ).

При исследовании задач такого рода часто большое значение имеет понятие индекса, введенное Пуанкаре.

Возьмем на рассматриваемой фазовой плоскости некоторую замкнутую кривую  $\Gamma$ , причем предположим, что эта кривая простая (т. е. не имеет двойных точек) и не проходит через состояния равновесия. Возьмем на

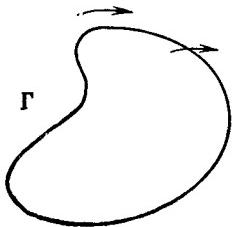


Рис. 55.

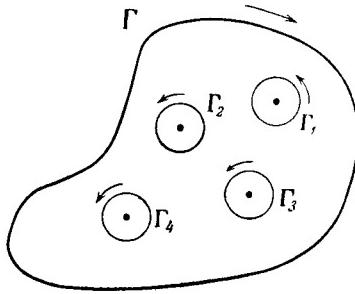


Рис. 56.

этой кривой некоторую точку  $S$  и проведем через нее вектор, совпадающий с направлением касательной к проходящей через эту точку фазовой траектории.

Пусть непрерывная функция  $\theta(t)$  определяет угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси  $Ox$ .

Если точка  $S$  сделает полный оборот по замкнутой кривой  $\Gamma$  и вернется на прежнее место, то вектор совершил за этот период некоторое число оборотов и, следовательно,  $\theta(t)$  изменится на величину  $2\pi j$ , где  $j$  — положительное или отрицательное целое число (рис. 55). Число  $j$  называется индексом замкнутого контура  $\Gamma$ .

Очевидно, что число  $j$  может быть выражено криволинейным интегралом:

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left( \arctg \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2}. \quad (9.41)$$

Этот криволинейный интеграл берется от полного дифференциала; следовательно, если внутри области, охватываемой кривой  $\Gamma$ , подынтегральная функция и ее производные непрерывны, то интеграл равен нулю.

Совершенно ясно, что такие свойства непрерывности могут нарушаться лишь в точках, для которых

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

т. е. в особых точках нашего уравнения.

Поэтому, если внутри кривой  $\Gamma$  особых точек не содержится, то ее индекс равен нулю.

В общем случае, когда внутри  $\Gamma$  имеется ряд особых точек, проведем построение, изображенное на рис. 56.

В этом случае сумма интегралов (9.41), взятых по кривой  $\Gamma$  и кривым  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ , окружающим особые точки, равна нулю, поскольку в соответствующей многосвязной области, ограниченной кривыми  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ , особых точек уже не содержится.

Поскольку кривым  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$  мы приписываем обход, противоположный принятому в определении индекса, видим, что индекс кривой  $\Gamma$  является суммой чисел, зависящих лишь от свойств соответствующей особой точки.

Эти числа и называются индексами особых точек. По данному определению, индекс какой-либо особой точки равняется интегралу

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2},$$

взятыму по кривой  $\Gamma$ , окружающей лишь одну данную точку  $M$ , и не зависящему от формы  $\Gamma$ .

Для фактического определения индекса можно, следовательно, взять в качестве  $\Gamma$  эллипс

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = 1, \quad (9.42)$$

сколь угодно близкий к точке равновесия. Здесь, как видно, мы поместили начало координат в рассматриваемую особую точку.

Тогда, пренебрегая в выражениях для  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  членами высшего порядка малости, получим:

$$j = \frac{q}{2\pi} \oint (x dy - y dx), \quad (9.43)$$

где

$$q = bc - ad,$$

или, в силу известного выражения для площади через криволинейный интеграл,

$$j = \frac{q}{\pi} S,$$

где  $S = \frac{\pi}{|q|}$  — площадь эллипса и, следовательно,

$$j = \frac{q}{|q|}.$$

Отсюда сразу следует, что индекс Пуанкаре для узла, фокуса и центра равен  $+1$ , а для седла  $-1$ . Эти же результаты можно было бы получить, исходя из непосредственного рассмотрения картины на фазовой плоскости (рис. 57).

Следует подчеркнуть, что даже если мы знаем характер и местоположение особых точек, то этого еще совершенно недостаточно для общего суждения о поведении интегральных кривых дифференциального уравнения (9.2). Однако для ряда частных случаев можно прийти к важным заключениям.

Рассмотрим, например, некоторую замкнутую интегральную кривую, определяемую уравнением (9.2), без двойных точек и особых точек.

Так как вектор, касательный к такой кривой, при полном обходе кривой в положительном направлении поворачивается на угол  $2\pi$ , то, следовательно, сумма индексов всех особых точек, находящихся внутри замкнутой интегральной кривой, равна 1.

Таким образом, очевидно, что внутри замкнутой интегральной кривой должна находиться, по крайней мере, одна особая точка, причем если эта точка одна, то это центр, фокус или узел.

Если внутри замкнутой интегральной кривой имеется несколько особых точек, то число особых точек типа седла на единицу меньше числа особых точек остальных типов.

Понятие индекса дает возможность определить количество и местоположение предельных циклов для данного уравнения, т. е. выделить на фазовой плоскости некоторое число колец конечной ширины, в каждом из которых расположен только один предельный цикл.

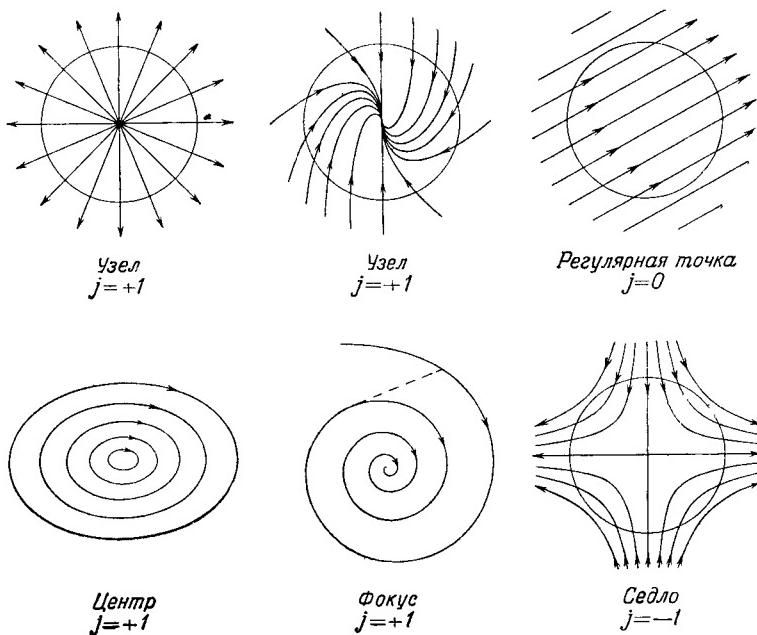


Рис. 57.

Для этого нужно выделить несколько особых точек, сумма индексов которых равна  $+1$ , и окружить их двумя замкнутыми кривыми так, чтобы в полученной кольцеобразной области не было особых точек.

После этого надо исследовать направление вектора скорости изображающей точки на этих кривых. В зависимости от направления этого вектора можно вывести заключение о наличии предельного цикла, а также о его характере. Так, например, если вектор скорости изображающей точки направлен везде внутрь кольцеобразной области, то в данной области существует, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл. Если вектор скорости везде направлен наружу, то существует, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл и т. д.

Приведем в заключение изящный пример \*), для которого легко определить предельный цикл аналитически.

\*) И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М — Л., 1947.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y) \sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y) \sqrt{x^2+y^2}-x}. \quad (9.44)$$

Делая замену переменных  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , где  $\rho$  и  $\varphi$  — полярные координаты, получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1, \quad (9.45)$$

общий интеграл которого будет:

$$\rho = 1 + Ce^\varphi, \quad (9.46)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Чтобы  $\rho$  было всегда положительным, необходимо, чтобы  $\varphi \leq \ln |C|$  для  $C < 0$ . Семейство интегральных кривых в этом случае будет состоять из окружности радиуса  $\rho = 1$  (для  $C = 0$ ), спиралей, выходящих из начала координат и асимптотически приближающихся к окружности изнутри (навивающихся на окружность изнутри) при  $\varphi \rightarrow -\infty$  (для  $C < 0$ ), и спиралей, асимптотически приближающихся к окружности снаружи (навивающихся на окружность снаружи) при  $\varphi \rightarrow +\infty$  (для  $C > 0$ ). Окружность с радиусом  $\rho = 1$  будет в данном случае являться предельным циклом уравнения (9.44) (рис. 58).

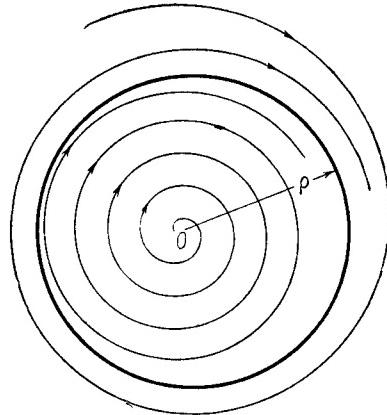


Рис. 58.

### § 10. Метод Льенара

Во многих важных частных случаях нелинейное дифференциальное уравнение (9.2) удобно исследовать с помощью графического построения интегральных кривых на фазовой плоскости. Очень изящным методом графического построения интегральных кривых является метод, предложенный французским инженером Льенаром [26]. Этот метод позволяет изучить все типы движения, допускаемые данным уравнением, и найти предельные циклы.

Льенар исследовал уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0. \quad (10.1)$$

К уравнению такого типа, как известно, принадлежит уравнение Ван-дер-Поля, а также может быть приведено уравнение Рэлея и др.

После работы Льенара вопрос об установлении критериев существования и единственности предельного цикла для уравнения типа (10.1) был предметом исследования ряда авторов. Упомянем, например, работы В. С. Иванова, Левинсона и Смита, А. В. Драгилева.

Приведем формулировку теоремы А. В. Драгилева. Введем обозначения:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx. \quad (10.2)$$

Тогда, если:

- 1)  $g(x)$  удовлетворяет условиям Липшица;

$$xg(x) > 0, \quad x \neq 0; \quad G(\infty) = \infty;$$

2)  $F(x)$  однозначно определена в промежутке  $-\infty < x < \infty$  и для каждого конечного интервала удовлетворяет условиям Липшица и, кроме того, для достаточно малых  $|x|$   $F(x) < 0$  при  $x > 0$  и  $F(x) > 0$  при  $x < 0$ ;

- 3) существуют число  $M$  и такие числа  $k$  и  $k'$ ,  $k' < k$ , что

$$F(x) \geq k, \quad \text{когда } x > M,$$

$$F(x) \leq k', \quad \text{когда } x < -M,$$

то уравнение (10.1) имеет, по крайней мере, один предельный цикл.

Как видно, здесь при весьма общих условиях устанавливается существование, по крайней мере, одного предельного цикла.

Вопросу о единственности предельного цикла посвящена теорема Левинсона и Смита:

Пусть

1.  $g(x)$  — нечетная функция, такая, что  $g(x) > 0$  для  $x > 0$ .

2.  $F(x)$  — нечетная функция, причем существует значение  $x_0$ , такое, что  $F(x) < 0$  для  $0 < x < x_0$  и  $F(x) \geq 0$  и монотонно возрастает для  $x \geq x_0$ .

3.  $F(\infty) = G(\infty) = \infty$ .

4.  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям Липшица на любом конечном интервале.

В таком случае уравнение (10.1) имеет предельный цикл, и притом единственный.

Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве этих теорем \*).

Рассмотрим более простой случай, когда выполнены следующие ограничительные условия:

1.  $f(x)$  — функция четная,  $g(x)$  — нечетная и, кроме того,  $xg(x) > 0$  для любых  $x$ , а  $f(0) < 0$ .

2.  $f(x)$  и  $g(x)$  — функции аналитические.

3.  $F(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

4. Уравнение  $F(x) = 0$  имеет единственный положительный корень  $x = a$ , и, кроме того, для  $x \geq a$  функция  $F(x)$  монотонно возрастает.

Как нетрудно видеть, этим условиям удовлетворяет уравнение Бан-дер-Поля, а также уравнение Рэлея.

Покажем, что при их выполнении уравнение (10.1) обладает единственным замкнутым циклом, который будет устойчивым. Доказательство проведем с помощью весьма наглядного и элементарного способа, приведенного в книге С. Леффшера [24]. Положим

$$y = \frac{dx}{dt} + F(x), \quad \lambda(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x). \quad (10.3)$$

При таких обозначениях  $\frac{y^2}{2}$  можно интерпретировать как кинетическую энергию, причем заметим, что введенную выше функцию  $G(x)$  можно интерпретировать как потенциальную энергию.

\*.) Доказательство этих теорем можно найти в книге В. В. Немышского и В. В. Степанова [33].

Определим теперь энергию, рассеиваемую системой при колебаниях, описывающихся уравнением (10.1). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{y^2}{2} + G(x) \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} + F(x) \right)^2 + G(x) \right\} = \\ &= \frac{dx}{dt} \left( \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) \right) + F(x) \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} + F(x) \right), \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (10.1) и обозначения (10.2) и (10.3), находим после сокращения на  $dt$ :

$$d\lambda = F(x) dy. \quad (10.4)$$

Таким образом, энергия, рассеянная системой, будет выражаться величиной интеграла  $\int F(x) dy$ , взятого вдоль интегральной кривой.

Переходя к переменным  $x, y$ , из уравнения (10.1) получим эквивалентную ему систему:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -g(x). \end{array} \right\} \quad (10.5)$$

Таким образом, нам надо показать, что система (10.5) обладает единственным устойчивым циклом.

Система уравнений (10.5) обладает следующими очевидными свойствами:

1) если  $x(t)$  и  $y(t)$  являются решениями системы уравнений (10.5), то в силу приведенных ограничений —  $x(t), -y(t)$  также будут решениями (так как  $F(x)$  — функция нечетная); следовательно, кривая, симметричная интегральной кривой по отношению к началу координат, является также интегральной кривой уравнения (10.5);

2) единственной критической точкой системы (10.5) на фазовой плоскости является начало координат, и поэтому предельный цикл должен окружать начало координат;

3) наклон интегральной кривой  $\Gamma_\alpha$  определяется следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y - F(x)}. \quad (10.6)$$

Так как  $g(0) = 0$ , то все касательные к траектории  $\Gamma$  в точках, лежащих на оси  $Oy$  (за исключением начала координат), горизонтальны.

С другой стороны, если мы рассмотрим кривую  $\Delta$ , уравнение которой будет  $y - F(x) = 0$  (рис. 59, пунктирная линия), то нетрудно заметить, что все касательные к  $\Gamma$  в точках пересечения ее с  $\Delta$  вертикальны, за исключением начала координат (так как на  $\Delta$   $y - F(x) = 0$  и, следовательно,  $\frac{dy}{dx} = \infty$ ). Далее, так как  $g(x)$  — нечетная,  $xg(x) > 0$ , то согласно (10.5)  $y$  убывает вдоль кривой  $\Gamma$  направо от оси  $Oy$  и возрастает налево от оси  $Oy$ . Кроме того,  $x$  возрастает, когда  $\Gamma$  лежит над  $\Delta$ .

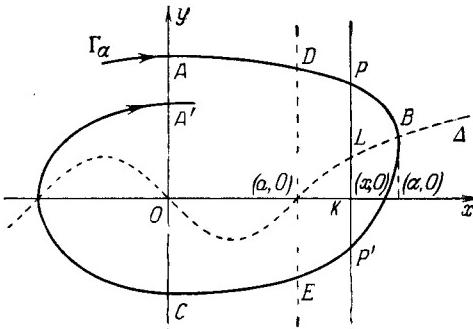


Рис. 59.

(так как в этом случае  $y - F(x) > 0$ ), и убывает, когда  $\Gamma$  лежит ниже  $\Delta$ . Следовательно, кривая  $\Gamma$  имеет вид, изображенный на рис. 59.

Обозначим через  $\alpha$  абсциссу точки  $B$  и будем в дальнейшем писать  $\Gamma_\alpha$  вместо  $\Gamma$ .

Установим теперь, при каких условиях  $\Gamma_\alpha$  будет замкнутым циклом. Очевидно, необходимо, чтобы  $OA' = OA$ , так как в противном случае, повторяя наше рассуждение, убедимся, что, продолжая  $\Gamma$  за точку  $A'$ , мы получим, поскольку цикл не может себя пересекать, точку  $A''$ , лежащую ниже  $A'$  (рис. 60), и т. д. Таким образом, если  $OA' \neq OA$ , кривая  $\Gamma_\alpha$  не сможет возвратиться ни в точку  $A$ , ни в точку  $A'$  и,

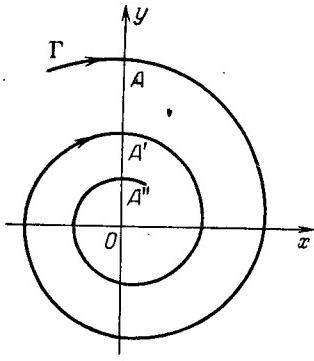


Рис. 60.

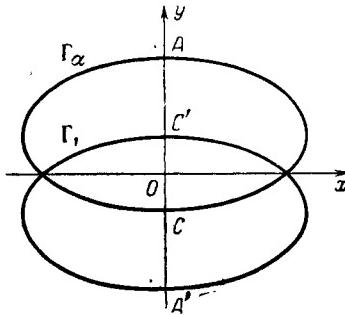


Рис. 61.

следовательно, не сможет быть замкнутой. Следовательно,  $\Gamma_\alpha$  должна пересекать каждую ось в двух и только в двух точках. Отсюда следует, что  $OA = -OC$ .

Действительно, допустим, что  $OA \neq -OC$  и пусть точки  $A'$  и  $C'$  симметричны точкам  $A$  и  $C$  по отношению к началу координат. Согласно первому свойству системы уравнений (10.5) кривая, симметричная кривой  $\Gamma_\alpha$  по отношению к началу координат, будет замкнутой интегральной кривой  $\Gamma_1$ , проходящей через точки  $A'$ ,  $C'$ . Так как ось  $Oy$  перпендикулярна к  $\Gamma_\alpha$ , то мы приходим к положению, изображенному на рис. 61, когда кривые  $\Gamma_\alpha$  и  $\Gamma_1$  пересекаются, что невозможно. Таким образом,  $OA = -OC$ .

Наоборот, предположим, что  $OA = -OC$ . Тогда кривая, симметричная дуге  $AC$  по отношению к началу координат, является дугой цикла, соединяющей точку  $A$  с точкой  $C$  налево от оси  $Oy$ . Вместе с дугой  $AC$  она образует замкнутый цикл.

Итак, для того чтобы  $\Gamma_\alpha$  являлась замкнутым циклом, необходимо и достаточно, чтобы  $OA = -OC$ .

Так как, согласно обозначениям (10.2),  $\lambda(0, y) = \frac{y^2}{2}$ , то последнее условие можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы  $\Gamma_\alpha$  являлась замкнутым циклом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda(A) = \lambda(C). \quad (10.7)$$

Итак, покажем, что при выполнении условий, которым удовлетворяют функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , выполняется равенство (10.7) и, следовательно, уравнение (10.1) обладает предельным циклом.

Для доказательства будем рассматривать следующие криволинейные интегралы, взятые вдоль кривой  $\Gamma$ .

Положим

$$\varphi(\alpha) = \lambda(C) - \lambda(A) = \int_{ABC} d\lambda = \int_{ABC} F(x) dy, \quad (10.8)$$

Если  $\alpha \leq a$  (см. рис. 59), то  $dy < 0$ , а также согласно четвертому условию (см. стр. 134)  $F(x) < 0$  и, таким образом,  $\varphi(\alpha) > 0$ , т. е.  $\lambda(C) > \lambda(A)$ .

Следовательно, в этом случае  $\Gamma_\alpha$  не может быть замкнутым циклом. (В этом случае  $\int_{ABC} F(x) dy > 0$ , т. е. энергия, рассеянная системой, положительна и, очевидно, в системе не могут осуществляться незатухающие колебания.)

Поэтому предположим, что  $\alpha \geq a$ , т. е. кривая  $\Gamma_\alpha$  имеет такой вид, как на рис. 59. Обозначим:

$$\varphi_1(\alpha) = \int_{AD} d\lambda + \int_{CE} d\lambda, \quad \varphi_2(\alpha) = \int_{DBE} d\lambda;$$

тогда

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha).$$

Согласно (10.4) и (10.6) мы можем написать:

$$d\lambda = F(x) \frac{dy}{dx} dx = -\frac{F(x) g(x)}{|y - F(x)|} dx. \quad (10.9)$$

Так как  $F(x) < 0$  для  $x < a$ , то  $d\lambda$  положительно, когда  $\Gamma_\alpha$  описана в направлении от  $A$  к  $D$  или от  $E$  к  $C$  и, таким образом,  $\varphi_1(\alpha) > 0$ . Наоборот, вдоль  $DBE$  мы имеем  $d\lambda < 0$  и, следовательно,  $\varphi_2(\alpha) < 0$ .

Очевидно, что при увеличении  $\alpha$  дуга  $AD$  будет подниматься, а дуга  $CE$  опускаться и, таким образом, для фиксированного  $x$  будет увеличиваться  $|y|$ . Так как для  $\varphi_1(\alpha)$  пределы интегрирования, принимая во внимание (10.9), фиксированы (от  $x = 0$  до  $x = a$ ), то в результате увеличения  $\alpha$   $\varphi_1(\alpha)$  будет уменьшаться, так как  $d\lambda = \frac{g(x)}{|F(x)|} dx$

$$\frac{g(x)}{|F(x)|} \pm 1$$

уменьшается при увеличении  $y$ .

Перейдем теперь к оценке характера изменения  $\varphi_2(\alpha)$  при увеличении  $\alpha$ . Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — два последовательных значения  $\alpha$ , причем  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Покажем, что

$$\varphi_2(\alpha_2) < \varphi_2(\alpha_1).$$

Проведем перпендикуляры  $D_1D'_1$  и  $E_1E'_1$  к прямой  $D_2E'_2$  (рис. 62). Тогда

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x) dy = \int_{D_2D'_1} F(x) dy + \int_{D'_1E'_1} F(x) dy + \int_{E'_1E_2} F(x) dy. \quad (10.10)$$

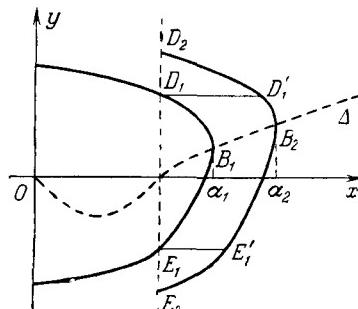


Рис. 62.

Так как при этом  $F(x) > 0$ , а  $dy < 0$ , то

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x) dy < \int_{D'_1E'_1} F(x) dy. \quad (10.11)$$

По самому построению  $D'_1$  и  $E'_1$  мы видим, что  $y$  меняется на кривых  $D_1B_1E_1$  и  $D'_1E'_1$  в одинаковых пределах (от большего значения к меньшему).

С другой стороны, для данного  $y$  абсцисса  $x$  точки кривой  $D'_1E'_1$  будет больше, чем для соответствующей точки кривой  $D_1B_1E_1$ .

Поэтому для данного  $y$   $F(x)$  на  $D_1B_1E_1$  будет меньше, чем  $F(x)$  на  $D'_1E'_1$ . Следовательно, поскольку  $dy < 0$ ,

$$\int_{D'_1E'_1} F(x) dy < \int_{D_1B_1E_1} F(x) dy, \quad (10.12)$$

и из (10.11) найдем:

$$\int_{D_2B_2E_2} F(x) dy < \int_{D_1B_1E_1} F(x) dy, \quad (10.13)$$

т. е. действительно  $\varphi_2(\alpha_2) < \varphi_2(\alpha_1)$  при  $\alpha_2 > \alpha_1$ .

Таким образом,  $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha)$  при  $\alpha \geq 0$  является монотонно убывающей функцией  $\alpha$ .

Заметим, что в случае  $\alpha \leq a$  имеем:

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha) > 0.$$

Покажем теперь, что

$$-\varphi_2(\alpha) \rightarrow \infty \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty.$$

Фиксируем для этого какое-либо  $x_1$  так, чтобы

$$a < x_1 < \alpha,$$

и проведем ось  $PP'$  параллельно оси  $Oy$  через точку  $x_1$  на оси  $Ox$  (рис. 59).

Имеем:

$$\int_{DBE} d\lambda < \int_{PBP} d\lambda = \int_{PBP_1} F(x) dy. \quad (10.14)$$

Но для дуги  $PBP_1$  имеем  $x \geq x_1$  и, следовательно,

$$F(x) \geq F(x_1).$$

Найдем поэтому

$$\int_{DBE} d\lambda \leq F(x_1) \int_{PBP_1} dy = -F(x_1) |\overline{PP_1}|,$$

откуда

$$-\varphi_2(\alpha) = - \int_{DBE} d\lambda > \overline{KL} \cdot \overline{KP}. \quad (10.15)$$

Но ясно, что отрезки  $\overline{KP}$  и  $\overline{KL}$  могут быть взяты сколь угодно большими при достаточно больших  $\alpha$ .

Итак, действительно,

$$-\varphi_2(\alpha) \rightarrow \infty \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы показали, что  $\varphi(\alpha)$  является монотонно убывающей функцией от значений  $\varphi(\alpha) > 0$  до  $\varphi(\alpha) = -\infty$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\varphi(\alpha)$  обращается в нуль один и только один раз для  $\alpha = \alpha_0$ , а  $\Gamma_{\alpha_0}$  будет искомая единственная замкнутая характеристика, так как для нее выполняется условие (10.7).

Покажем теперь, что  $\Gamma_{\alpha_0}$  будет устойчивым предельным циклом.

Если  $\alpha < \alpha_0$ , то  $\varphi(\alpha) > 0$  и, следовательно,  $\lambda(C) > \lambda(A)$ .

Если  $\alpha > \alpha_0$ , то  $\varphi(\alpha) < 0$  и, следовательно,  $\lambda(C) < \lambda(A)$ .

Пусть точки  $A_0$  и  $C_0$  соответствуют пересечению  $\Gamma_{\alpha_0}$  с осью  $y$ ; тогда очевидно, что точка  $C$  ближе к  $\Gamma_{\alpha_0}$ , чем точка  $A$ , если  $\alpha < \alpha_0$ , и, следовательно, точка  $A'$  ближе к  $\Gamma_{\alpha_0}$ , чем  $A$ .

Проводя аналогичные рассуждения для случая  $\alpha > \alpha_0$ , приходим к заключению об устойчивости предельного цикла  $\Gamma_{\alpha_0}$ .

Перейдем теперь к изложению метода фактического построения интегральных кривых на фазовой плоскости.

Графическим методом Льенара обычно пользуются тогда, когда упругая сила  $g(x)$  линейна относительно  $x$ ; при этом соответствующим выбором новых переменных можно, не нарушая общности, привести уравнение (10.6) к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - F(x)}. \quad (10.16)$$

Метод графического интегрирования уравнений типа (10.16), предложенный Льенаром, состоит в следующем. На фазовой плоскости строим кривую  $\Delta$ , уравнение которой

$$y - F(x) = 0 \quad (10.17)$$

(рис. 63).

Построив эту кривую, мы можем графически найти направление касательной к интегральной кривой уравнения (10.16), проходящей через любую точку фазовой плоскости. Для этого из точки  $M(x, y)$ , для которой мы ищем направление касательной, опускаем перпендикуляр на ось абсцисс  $\overline{MC}$  и продолжаем его до пересечения с кривой  $\Delta$  в точке  $D$ . Из точки  $D$  опускаем перпендикуляр на ось ординат  $\overline{DN}$ . Тогда линия  $\overline{NM}$  будет перпендикулярна к интегральной кривой уравнения (10.16), проходящей через точку  $M$ . Действительно, если фазовая точка уравнения (10.16) в момент  $t = 0$  совпадает с точкой  $M(x, y)$ , то спустя отрезок времени  $dt$  она переместится вдоль оси ординат на отрезок

$$dy = -x dt = \overline{ND} dt = \overline{MC'},$$

а вдоль оси абсцисс на отрезок

$$dx = (y - F(x)) dt = \overline{MD} dt = \overline{C'M'}.$$

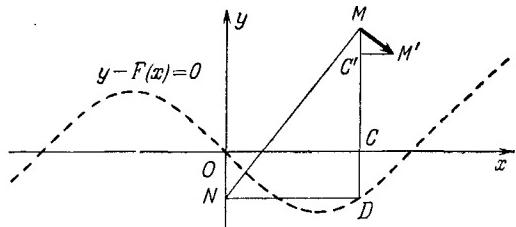


Рис. 63.

Так как треугольники  $NDM$  и  $MC'M'$  подобны, то

$$\frac{\overline{MC'}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{C'M'}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{M'M}}{\overline{MN}}$$

и, следовательно,  $\overline{M'M} \perp \overline{MN}$ .

Таким образом, для того чтобы через данную точку  $M(x, y)$  в плоскости  $x, y$  провести касательную к интегральной кривой  $\Gamma$ , проходящей через эту точку  $M(x, y)$ , достаточно провести вертикальную прямую  $MCD$ , горизонтальную прямую  $DN$  и соединить точки  $N$  и  $M$ . Искомая касательная к кривой  $\Gamma$  будет перпендикулярна к прямой  $NM$ , откуда следует, что, имея произвольную кривую  $\Delta$  и произвольные начальные условия  $x_0, y_0$ , изображаемые точкой  $M_0(x_0, y_0)$ , легко найти направление касательных и, следовательно, построить приближенную интегральную кривую.

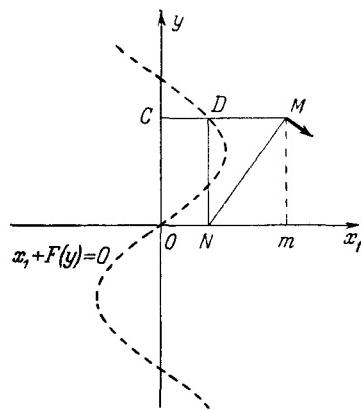


Рис. 64.

касательной и в окрестности новой точки заменяем интегральную кривую отрезком прямой. В результате получается приближенная интегральная кривая в виде ломаной линии, причем степень точности будет зависеть от величины отдельных звеньев.

Во многих случаях для преобразования уравнения (10.1) вместо замены переменных (10.3) удобно произвести замену согласно формуле

$$x_1 = \int x^1 dt$$

и рассматривать уравнение в виде

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + F\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + x_1 = 0 \quad (10.18)$$

или, обозначая  $\frac{dx_1}{dt} = y$  и исключая время  $t$ ,

$$y \frac{dy}{dx_1} + F(y) + x_1 = 0. \quad (10.19)$$

В этом случае уравнение вспомогательной кривой будет:

$$x_1 + F(y) = 0, \quad (10.20)$$

на фазовой плоскости мы получаем построение, приведенное на рис. 64. Опуская из точки  $M$  перпендикуляры на ось абсцисс  $\overline{Mm}$  и ординат  $\overline{MC}$ , а также опуская перпендикуляр из точки  $D$  на ось абсцисс, находим согласно уравнению (10.19):

$$\overline{Nm} = -y \frac{dy}{dx_1}, \quad (10.21)$$

и, следовательно, уравнение (10.19) может быть записано в виде

$$\overline{Nm} = \overline{CM} - \overline{CD}, \quad (10.22)$$

так как  $\overline{CM} = x_1$ ,  $\overline{CD} = -F(y)$ .

Итак, и в этом случае можем провести построение приближенных интегральных кривых согласно изложенной выше схеме.

Если кривая  $\Delta$  симметрична относительно начала координат, то построенные таким образом интегральные кривые  $\Gamma$  будут навиваться на замкнутые кривые — предельные циклы, соответствующие периодическому режиму, существование и устойчивость которых были доказаны выше.

Заметим, что графическое построение, предложенное Льенаром, не предполагает обязательной симметрии кривой  $\Delta$ . Этот графический прием применим также в случае, если  $\Delta$  более или менее близка к симметричной кривой, например к кривой, определяемой характеристикой неоновой лампы и т. д. При этом кривая  $\Delta$  не должна обязательно изображаться каким-либо алгебраическим уравнением. Эта кривая может быть получена экспериментально; последнее очень важно с практической точки зрения.

Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие описанное графическое построение интегральных кривых.

Заметим, что для некоторых частных случаев построение Льенара сразу дает интегральную кривую и необходимость в построении приближенной ломаной отпадает.

Например, в случае свободных линейных колебаний, описываемых уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad (10.23)$$

уравнение фазовых траекторий будет:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (10.24)$$

В данном случае уравнение кривой  $\Delta$  будет  $x=0$ , и тогда точка  $N$  совпадает с началом координат для всех задаваемых значений точки  $D$ . Следовательно, интегральными кривыми будут окружности с центром в начале координат.

Если колебания системы происходят под воздействием линейной упругой силы при наличии кулонова трения, уравнение движения может быть представлено в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (10.25)$$

В этом случае для кривой  $\Delta$  получаем следующее уравнение:

$$\left. \begin{array}{ll} x = A & \text{при } \frac{dx}{dt} > 0, \\ x = -A & \text{при } \frac{dx}{dt} < 0. \end{array} \right\} \quad (10.26)$$

Очевидно, что для интегральной кривой  $\Gamma$  в верхней полуплоскости точка  $N$  совпадет с точкой  $S_1$ , а в нижней полуплоскости — с точкой  $S_2$ .

(рис. 65) независимо от задаваемых значений точки  $D$ . Таким образом, интегральная кривая  $\Gamma$  будет состоять из дуг окружностей с центрами в точках  $S_1$  и  $S_2$ ; эти дуги переходят друг в друга при пересечении интегральной кривой с осью  $Ox$ . При этом очевидно, что амплитуда затухающих колебаний уменьшается на величину  $2A$  при каждом

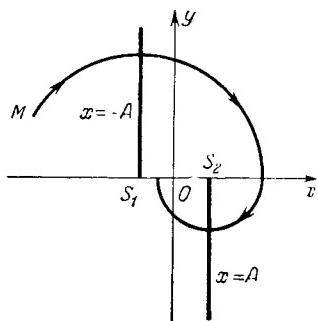


Рис. 65.

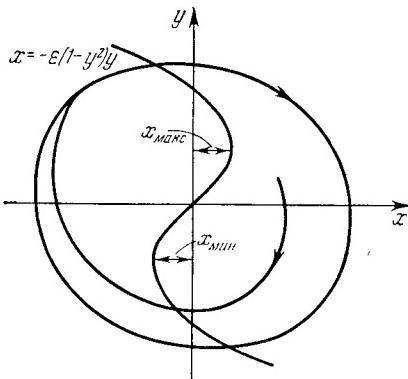


Рис. 66.

прохождении между двумя последовательными положениями покоя  $y = 0$  до тех пор, пока колебательная система окончательно не приходит в состояние покоя.

Проинтегрируем теперь методом Лъенара уравнение Ван-дер-Поля, причем возьмем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left( 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (10.27)$$

Уравнение кривой  $\Delta$  на фазовой плоскости будет:

$$x - \varepsilon (1 - y^2) y = 0, \quad (10.28)$$

где  $\varepsilon$  — некоторый параметр.

Свойства функции  $-\varepsilon(1 - y^2)y$  следующие:

1) при  $y = 0$  и  $y = \pm 1$   $x = 0$ ;

2) при  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$   $x$  принимает экстремальные значения:

$$x = \pm \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

(рис. 66).

Согласно этому при увеличении  $\varepsilon$  петля будет вытягиваться вдоль оси  $x$ , приближаясь к паре прямых  $y = \pm 1$  (рис. 67).

В случае, когда  $\varepsilon = 0$ , интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(1 - y^2)y - x}{y} \quad (10.29)$$

образуют семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, и тогда это уравнение будет соответствовать простым гармоническим колебаниям.

При  $\varepsilon \neq 0$  исследование поведения интегральных кривых уравнения (10.27) проводим, пользуясь графическим методом Лъенара. Согласно этому методу для кривой (10.28) строим поле направлений и находим предель-

ные циклы. На рис. 67 приведены кривые (10.28), построенные соответственно для трех различных значений:  $\varepsilon=0,1$ ;  $\varepsilon=1$  и  $\varepsilon=10$ . На этих же рисунках по методу Льенара построены предельные циклы системы. Как известно, в рассматриваемом случае  $\varepsilon>0$  начало координат является неустойчивым положением равновесия, все интегральные кривые, выходящие из начала координат, будут описывать вокруг него расширяющиеся спирали. Однако раскручивающиеся около начала координат спирали не могут простираться неопределенно далеко, так как для больших значений  $y$  затухание в колебательной системе, описываемой уравнением (10.27), становится положительным.

При расширении каждой спирали ее последовательные витки все более и более сближаются друг с другом и все спирали асимптотически навиваются изнутри на замкнутую кривую — предельный цикл.

На этот предельный цикл будут навиваться как спирали, близкие к началу координат, так и спирали, удаленные от начала. Замкнутая

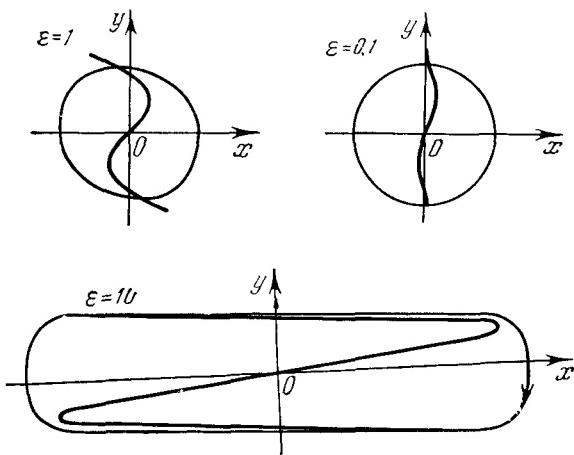


Рис. 67.

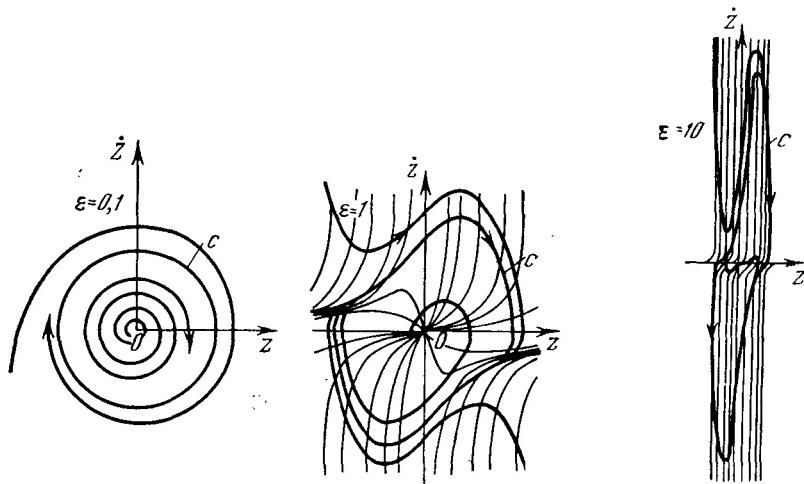


Рис. 68.

интегральная кривая — предельный цикл, к которой стремятся все интегральные кривые уравнения (10.29), соответствует периодическому решению уравнения (10.27).

Заметим, что замкнутый цикл содержит внутри одну особую точку с индексом +1, причем для  $\varepsilon=0,1$  и  $\varepsilon=1,0$  эта точка является неустойчивым фокусом, для  $\varepsilon=10$  мы имеем неустойчивый узел.

Исходя из рис. 67, можно судить о том, как изменяется характер движения в системе при изменении параметра  $\varepsilon$ . При любых  $\varepsilon$  в системе происходят автоколебания, но размах и форма этих автоколебаний и характер их установления различны. На рис. 68 для сопоставления приведены нами результаты численного интегрирования непосредственно уравнения (10.29) соответственно при тех же значениях параметра  $\varepsilon$ , а также кривые, характеризующие непосредственно изменение  $x$  со временем (рис. 69).

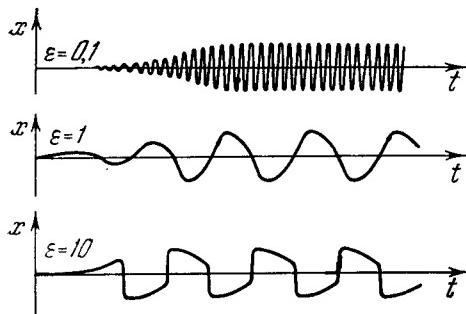


Рис. 69.

применений), разработал стандартный графический метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в самовозбуждающихся системах. Разработанный им метод может быть применен для рассмотрения колебательных процессов в сложных контурах, а также в связанных контурах.

Однако на этом методе мы здесь не будем останавливаться, отсылая интересующихся к соответствующей специальной литературе.

### § 11. Релаксационные колебательные системы

До сих пор мы рассматривали уравнение Ван-дер-Поля в основном при малом  $\varepsilon$  и только в § 9 указали на те изменения, которые происходят в решении при возрастании  $\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь уравнение Ван-дер-Поля при больших  $\varepsilon$  и, в частности, попытаемся найти асимптотическую форму решения при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Для исследования удобно взять уравнение Ван-дер-Поля в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon \left[ \frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 \right] + x = 0 \quad (11.1)$$

и добиться того, чтобы перед второй производной стоял малый параметр.

Полагая в уравнении (11.1)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varepsilon \eta, \\ t &= \varepsilon t_1, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

получаем

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2\eta}{dt_1^2} - \left[ \frac{d\eta}{dt_1} - \frac{1}{3} \left( \frac{d\eta}{dt_1} \right)^3 \right] + \eta = 0 \quad (11.3)$$

или

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta} = \frac{\dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta}{\dot{\eta}}. \quad (11.4)$$

\*) Ренсукি-Усуи, Нелинейная теория электрических генераторов, Report of Radio Research in Japan, vol. V, № 2, 1935.

При  $\varepsilon \gg 1$  можем в уравнении (11.4) в первом приближении пренебречь слагаемым  $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\dot{\eta}}{d\eta}$ , после чего получим зависимость между  $\eta$  и  $\dot{\eta}$ :

$$\dot{\eta} = \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta, \quad (11.5)$$

при помощи которой не представляет затруднений исследовать характер движения на фазовой плоскости.

Построим кривую (11.5) (рис. 70) и заметим, что согласно (11.4) на кривой (11.5) поле направлений горизонтально, так как  $\frac{d\dot{\eta}}{d\eta} = 0$  для всех  $\eta$  и  $\dot{\eta}$ , удовлетворяющих уравнению (11.5). В остальных же точках фазовой плоскости (за исключением точек, очень близких к кривой (11.5)) при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  поле направлений стремится к вертикальному, так как согласно (11.4)  $\frac{d\dot{\eta}}{d\eta} \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  для всех точек, не удовлетворяющих уравнению (11.5). Исходя из этого, видим, что при больших значениях  $\varepsilon$  интегральная кривая уравнения (11.4), выходящая из произвольной точки  $P$  (см. рис. 70), будет очень близка к вертикальной прямой почти до точки  $P_1$ , лежащей на кривой (11.5). Далее интегральная кривая пойдет вдоль кривой (11.5), оставаясь ниже ее, пока не достигнет окрестности точки  $P_2$ , после чего пойдет вертикально вверх до тех пор, пока вновь не достигнет кривой (11.5). Затем интегральная кривая будет следовать вдоль кривой (11.5), оставаясь над ней; досгнув точки  $P_4$ , интегральная кривая повернется вертикально вниз. В результате мы получаем предельный цикл, который при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  будет иметь вид, изображенный на рис. 70.

Такую картину мы получаем вследствие того, что участки  $P_3P_4$  и  $P_2P_5$  кривой (11.5) обладают свойством притяжения, причем чем больше  $\varepsilon$ , тем сильнее будет притяжение. Так как в любой точке поле направлений вертикально, а на кривой (11.5) горизонтально, то любая точка стремится к кривой (11.5), подойдя к ней, отходит, так как на кривой поле направлений горизонтально, после этого точка снова стремится приблизиться к кривой (11.5). Если  $\varepsilon$  достаточно велико, то указанных отклонений мы не заметим и практически получим картину, изображенную на рис. 70.

Асимптотическое значение для периода колебаний в рассматриваемом приближении находим, подсчитывая интеграл по предельному циклу.

Для уравнения (11.4) имеем:

$$dt_1 = \frac{d\eta}{\dot{\eta}}, \quad (11.6)$$

откуда

$$T_1 = \oint \frac{d\eta}{\dot{\eta}}. \quad (11.7)$$

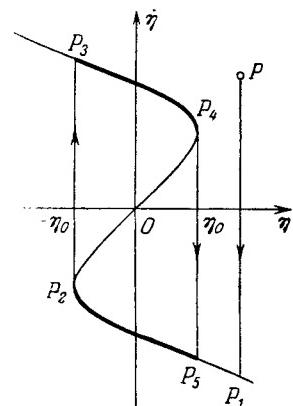


Рис. 70.

Так как на вертикальных участках цикла  $d\eta = 0$ , то вместо (11.7) можем написать:

$$T_1 = 2 \int_{\dot{\eta}_1}^{\dot{\eta}_2} d\left( \frac{\dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3}{\dot{\eta}} \right) = 2 \left( \ln \dot{\eta} - \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 \right) \Big|_{\dot{\eta}_1}^{\dot{\eta}_2}. \quad (11.8)$$

Согласно (11.5) находим  $\dot{\eta}_1 = 1$ ,  $\dot{\eta}_2 = 2$  и, следовательно, для периода  $T_1$  при больших значениях  $\varepsilon$  получаем формулу

$$T_1 = 1,614 \quad (11.9)$$

или, переходя к старым переменным, следующую асимптотическую формулу:

$$T = 1,614 \varepsilon. \quad (11.10)$$

Итак, для случая  $\varepsilon \gg 1$  при асимптотической трактовке колебательный процесс будет протекать следующим образом: при возрастании  $\eta$ , начиная от значений  $-\eta_0$ , скорость  $\dot{\eta}$  будет положительна и изображающая точка на фазовой плоскости будет двигаться по кривой  $P_3P_4$  (см. рис. 70). Когда  $\eta$  достигнет максимального значения  $+\eta_0$ , изображающая точка скачком

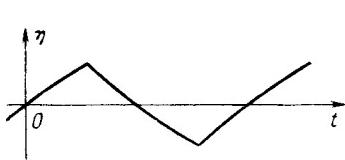


Рис. 71.

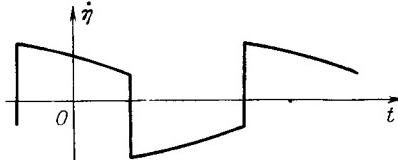


Рис. 72.

перейдет из положения  $P_4$  в  $P_5$ , что соответствует мгновенному изменению знака скорости  $\dot{\eta}$ . Далее, при уменьшении  $\eta$  скорость  $\dot{\eta}$  будет оставаться отрицательной и изображающая точка будет двигаться по кривой  $P_5P_2$ . В точке  $P_2$  опять произойдет изменение знака скорости, а изображающая точка на фазовой плоскости скачком перейдет в положение  $P_3$ .

Таким образом, в течение одного периода колебания скорость  $\dot{\eta}$  терпит разрыв дважды — в моменты достижения величиной  $\eta$  максимального и минимального значения. Разумеется, на самом деле скорость непрерывна, хотя и меняется весьма быстро, так как  $\varepsilon$  хотя и велико, но конечно, и, говоря о разрыве, мы допускаем определенное упрощение, соответствующее принятому нами асимптотическому приближению.

После того как нами получена зависимость скорости от смещения на фазовой плоскости и найден период колебания, не представляет затруднений построить кривые, представляющие  $\eta$  и  $\dot{\eta}$  как функции  $t$  (рис. 71 и 72).

Рассмотренные нами колебания называются релаксационными и имеют широкое распространение в природе.

Приведенная здесь идеализированная разрывная трактовка уравнения Ван-дер-Поля при больших  $\varepsilon$  может быть применена и в общем случае при исследовании нелинейных колебательных систем при  $\varepsilon \gg 1$ . При такой трактовке мы пренебрегаем в уравнении инерционным членом, в результате чего релаксационные колебания характеризуются дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0, \quad (11.11)$$

причем последнее удобно обратить относительно  $\frac{dx}{dt}$  и написать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x), \quad (11.12)$$

где  $\Phi(x)$  представляет определенную многозначную функцию типа, схематически изображенного на рис. 74.

Приведем еще пример конкретной релаксационной колебательной системы, описываемой уравнением типа (11.12).

Рассмотрим схему (рис. 73), представляющую последовательное соединение самоиндукции  $L$ , сопротивления  $R$  и нелинейного элемента с вольтамперной характеристикой типа « $S$ », замкнутое на источнике постоянного напряжения  $E_a$ . Здесь для элемента « $S$ » вольтамперная характеристика

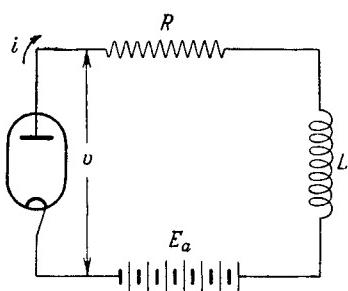


Рис. 73.

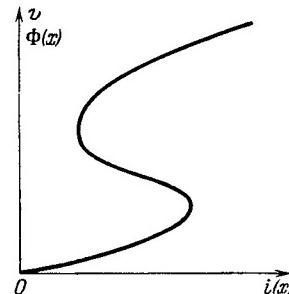


Рис. 74.

имеет форму, примерно изображенную на рис. 74. В качестве конкретной модели такого нелинейного элемента можно взять, например, электронную лампу в динатронном режиме.

Составляя для рассматриваемой схемы баланс напряжений, приходим к дифференциальному уравнению вида

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = E_a. \quad (11.13)$$

Заметим теперь, что поскольку единственным резервуаром, способным запасать энергию колебаний, является в нашей системе самоиндукция, то запасенная в ней энергия будет равна  $\frac{1}{2} Li^2$ . Так как в течение колебательного процесса энергия должна изменяться непрерывно, то очевидно, что и величина тока  $i$  должна также изменяться непрерывно, плавно увеличиваясь и уменьшаясь.

С другой стороны, в соответствии с рис. 74 нетрудно убедиться, что при плавном увеличении и соответственно при плавном уменьшении тока  $i$  напряжение  $v$  будет изменяться, как указано на рис. 75. Обозначим зависимость между напряжением и током, представленную графически на этом рисунке (причем учитываем только отрезки сплошной линии), функциональным соотношением

$$v = f(i), \quad (11.14)$$

в котором  $f(i)$  имеет два значения для  $i$ , изменяющегося в интервале  $(i_0, i_1)$ .

Пусть параметры генератора подобраны так, что в интервале  $(i_0, i_1)$  значения функции

$$\Phi(i) = \frac{E_a - Ri - f(i)}{L}, \quad (11.15)$$

соответствующие нижней ветви  $f(i)$ , положительны, а для верхней ветви отрицательны. Тогда в нашей схеме возбуждается релаксационный колебательный процесс, при котором ток  $i$  будет изменяться в пределах от  $i_0$  до  $i_1$ . Дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс, будет принадлежать к типу (11.12).

Как видно, в данном примере мы не доводили дело до построения

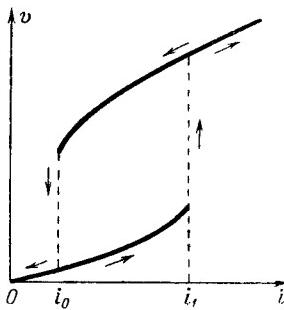


Рис. 75.

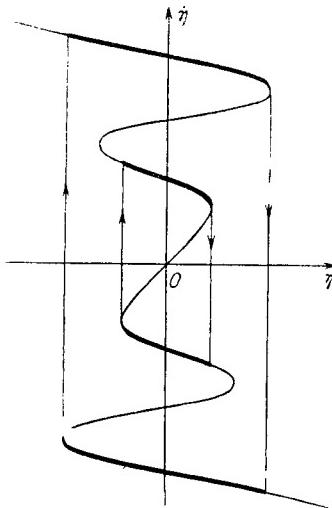


Рис. 76.

дифференциального уравнения второго порядка, а сразу приняли схему, которая привела к разрывному уравнению вида (11.12), в котором не принимается во внимание инерционный член.

До сих пор рассматривался случай наличия одного замкнутого цикла. Если кривая, характеризующая зависимость (11.12), будет иметь вид, изображенный на рис. 76, то получим два замкнутых цикла.

Заметим, что рассмотренные релаксационные колебательные процессы протекают без внешних периодических сил, и потому естественно уравнение (11.12) называть уравнением свободных релаксационных колебаний.

Изложенная здесь разрывная трактовка релаксационных колебательных процессов интуитивно убедительна.

Однако если мы хотим ее строго обосновать или вычислить соответствующие поправки для формы колебаний и их периода  $T$ , то необходимо обратиться к строгому методу асимптотического приближения, разработанному А. А. Дородницыным.

## § 12. Метод А. А. Дородницына для уравнения Ван-дер-Поля

В настоящем параграфе приведем метод, разработанный А. А. Дородницким [15], при помощи которого можно построить интегральные кривые на фазовой плоскости в случае  $\varepsilon \gg 1$ .

Суть этого метода заключается во введении некоторых «связующих» областей и в построении для этих перекрещивающихся областей особых асимптотических разложений по степеням  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Для наглядности применения этого метода приведем согласно А. А. Дородницину решение уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (12.1)$$

при больших значениях параметра  $\varepsilon$ \*).

На фазовой плоскости  $(x, y)$ , где  $y = \frac{dx}{dt}$ , это уравнение преобразуется к следующему виду:

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon(1-x^2)y + x = 0. \quad (12.2)$$

Как известно, предельный цикл для уравнения (12.2) имеет вид, приведенный на рис. 77.

При больших значениях параметра  $\varepsilon$  решение уравнения (12.2) в областях I и III стремится соответственно к решениям «укороченных» уравнений

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon(1-x^2)y = 0, \quad (12.3)$$

$$-\varepsilon(1-x^2)y + x = 0. \quad (12.4)$$

Однако области I и III, в которых можно рассматривать вместо уравнения (12.2) соответственно уравнения (12.3) и (12.4), не соприкасаются между собой, и поэтому решения этих уравнений нельзя сопрячь, так как неизвестно, как выбрать постоянную интегрирования в уравнении (12.3), чтобы при аналитическом продолжении решения в область III это решение перешло в то, которое стремится к решению (12.4).

Для того чтобы можно было произвести такое сопряжение решений, вводят две «связующие» области II и IV, для которых строят асимптотические решения непосредственно уравнения (12.2), так как в этих областях мы не можем воспользоваться «укороченными» уравнениями. Области I, II, III и IV перекрываются между собой, и поэтому мы можем найти решение для всего цикла с точностью до величин любого порядка малости относительно  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Приступим к построению асимптотических решений уравнения (12.2) для введенных областей (см. рис. 77). При этом заметим, что ввиду симметрии можно рассматривать только одну часть каждой из введенных областей.

Построим сначала решение для области I. Для этого обозначим через  $a_1$  и  $a_2$  значения  $x$ , при которых  $\frac{dx}{dt} = 0$  (для предельного цикла

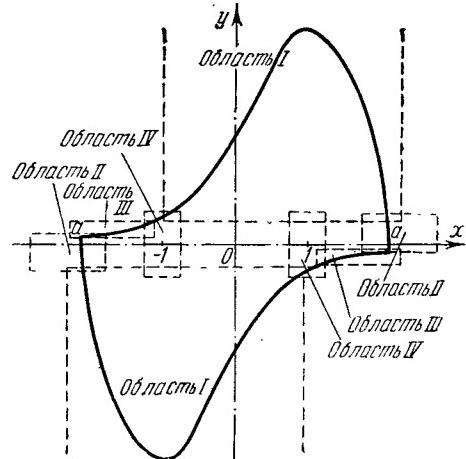


Рис. 77.

\* Заметим, что В. В. Казакевичем («О приближенном интегрировании уравнения Ван-дер-Поля», ДАН СССР, XLIX, 6, 1945) разработан интересный прием исследования уравнения (12.1).

$a_1 = a_2 = a$ ; тогда область I определяется следующими неравенствами:

$$\left. \begin{array}{l} -1 + \nu < x < a_1 - \nu, \quad y > 0, \quad \nu > 0; \\ -a_2 + \nu < x < 1 - \nu, \quad y < 0, \quad \nu > 0. \end{array} \right\} \quad (12.5)$$

Как указывалось выше, решение достаточно искать только для первой части области (12.5). Решение ищем в виде ряда

$$y = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2n} f_n(x). \quad (12.6)$$

Подставляя значение  $y$  (12.6) в уравнение (12.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем систему уравнений, из которой находим последовательно все  $f_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Так, для первых двух функций имеем:

$$f_0(x) = c + x - \frac{1}{3}x^3, \quad (12.7)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) = \frac{x_1}{x_1^2 - 1} & \left[ \ln \left( 1 - \frac{x}{x_1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{(2x + x_1)^2 + 3(x_1^2 - 4)}{4(x_1^2 - 3)} \right] + \\ & + \frac{x_1^2 - 2}{x_1^2 - 1} \sqrt{\frac{3}{x_1^2 - 4}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2x + x_1}{\sqrt{3(x_1^2 - 4)}} - \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\sqrt{3(x_1^2 - 4)}} \right], \end{aligned} \quad (12.8)$$

где через  $x_1$  обозначен вещественный положительный корень уравнения  $f_0(x) = 0$ , причем предполагается, что  $c > \frac{2}{3}$ , что и имеет место для предельного цикла. Функции  $f_n(x)$  имеют особенности в окрестности точки  $x = x_1$ , однако ряд (12.6) сохраняет асимптотический характер до значений  $x$ , удовлетворяющих условию

$$O(x_1 - x) > O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2}\right).$$

В частности, ряд (12.6) является асимптотическим рядом при  $x = x_1 - O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ; при этом  $y$  будет порядка единицы.

Найдем теперь асимптотическое решение для области II, являющейся окрестностью точек  $y = 0$ ,  $x = a_1$ ;  $y = 0$ ,  $x = -a_2$ . Для определенности будем рассматривать ту часть области II, для которой  $y = 0$ ,  $x = a_1$ .

Введем новую переменную  $z$  по формуле  $z = -\varepsilon y$  и будем искать  $x$  как функцию  $z$ . Уравнение (12.2) запишется следующим образом:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{z}{z(x^2 - 1) - x}. \quad (12.9)$$

Решение этого уравнения ищем в виде ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) \varepsilon^{-2n}. \quad (12.10)$$

Подставляя значение  $x$  (12.10) в уравнение (12.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений для определения функций  $\chi_n(z)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Для первых двух функций имеем:

$$\chi_1(z) = \frac{1}{a_1^2 - 1} \left[ z + \frac{a_1}{a_1^2 - 1} \ln \left( 1 - \frac{a_1^2 - 1}{a_1} z \right) \right], \quad (12.11)$$

$$\chi_2(z) = \frac{a_1}{(a_1^2 - 1)^4} \left\{ (a_1^2 - 1) z \left( z + \frac{a_1^2 + 1}{a_1(a_1^2 - 1)} \right) + \right. \\ + \left[ \frac{a_1^2 + 1}{a_1^2 - 1} + 2a_1 z - 2(a_1^2 - 1) z^2 \right] \frac{\ln \left[ 1 - \frac{z(a_1^2 - 1)}{a_1} \right]}{1 - z \frac{a_1^2 - 1}{a_1}} + \\ \left. + \frac{3a_1^2 + 1}{2(a_1^2 - 1)} \ln^2 \left( 1 - z \frac{a_1^2 - 1}{a_1} \right) \right\}. \quad (12.12)$$

Эти функции имеют особенности при  $z \rightarrow \frac{a_1}{a_1^2 - 1}$  и при  $z \rightarrow -\infty$ . Однако ряд (12.10) сохраняет асимптотический характер для всех  $z$ , удовлетворяющих условию

$$O\left(\frac{a_1}{a_1^2 - 1} - z\right) > O\left(\frac{\ln \epsilon}{\epsilon^2}\right),$$

а также в случае  $z < 0$  для всех  $z$ , удовлетворяющих условию

$$O(z) < O(\epsilon^2),$$

При этом асимптотическая сходимость ряда (12.10) имеет место при  $z = -\epsilon$ , т. е.  $y = 1$ .

Так как ряды (12.6), (12.10) асимптотически сходятся при одинаковых значениях  $x$ , при которых  $y = O(1)$ , то можем их сопрячь. Для этого нужно определить постоянную  $a_1$  по заданному значению постоянной  $c$ . Полагая в (12.6) и (12.10)  $y = 1$ , получаем следующие два уравнения с двумя неизвестными  $x^*$  и  $a_1$ :

$$1 = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^*) \epsilon^{-2n}, \quad x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(-\epsilon) \epsilon^{-2n}. \quad (12.13)$$

Из первого уравнения находим  $x^*$ , после чего из второго уравнения находим  $a_1$ , выраженное через  $c$  или через  $x_1$ .

Перейдем теперь к определению решения для области III. Эта область определяется следующими интервалами:

$$\begin{aligned} a_1 - \nu &> x > 1 + \nu, \quad y < 0, \quad \nu > 0; \\ -a_2 + \nu &< x < -1 - \nu, \quad y > 0, \quad \nu > 0, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (12.14)$$

и имеет очень существенное значение для релаксационных колебаний. Когда  $x$  попадает в область (12.14), то колебания системы сразу же с большой степенью точности переходят к установившимся автоколебаниям.

Будем рассматривать ту часть области III, для которой  $y < 0$ .

Произведя ряд выкладок, легко показать, что решение уравнения (12.2) в этой области может быть получено в виде ряда

$$y = -\frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \epsilon^{-2n}, \quad (12.15)$$

где  $P_n(x)$  определяются, как и выше, из ряда рекуррентных уравнений и имеют вид

$$P_0(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad P_1(x) = -\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}, \dots \quad (12.16)$$

Ряд (12.15) сохраняет асимптотический характер при условии  $O(x - 1) > O(\epsilon^{-2/3})$ , причем при подходе к границе сходимости  $y$  (12.15) будет иметь порядок  $\epsilon^{-1/3}$ .

Перейдем к определению решения в области IV. Эта область определяется следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} 1-y < x < 1+y, \quad p < 0, \quad y > 0; \\ -1-y < x < -1+y, \quad p > 0, \quad y > 0. \end{array} \right\} \quad (12.17)$$

Как показано выше, при подходе к границе области III  $y$  приближается к  $O(\varepsilon^{-1/3})$ . Поэтому естественно ввести замену переменных:

$$y = -\varepsilon^{-1/3}Q(u), \quad u = \varepsilon^{2/3}(x-1). \quad (12.18)$$

Тогда уравнение (12.2) примет следующий вид:

$$Q \frac{dQ}{du} - 2uQ + 1 = \varepsilon^{-2/3}(u^2Q - u). \quad (12.19)$$

Решение этого уравнения ищем опять в виде асимптотического ряда

$$Q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u) \varepsilon^{-2/3n}, \quad (12.20)$$

который подставляем в (12.19), и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем ряд уравнений для последовательного определения функций  $Q_n(u)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом начальные условия для  $Q_n(u)$  должны определяться так, чтобы полученное решение было сопряжено с решением в области III.

После ряда выкладок находим:

$$\begin{aligned} Q_0(u) &= u^2 + \alpha + \frac{1}{u} - \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{\alpha}{5u^5} + \dots, \\ Q_1(u) &= \frac{1}{A(u)} \left[ C + \int_0^u A(u) \left( u^2 - \frac{u}{Q_0} \right) du \right], \\ A(u) &= \exp \left( - \int_0^u \frac{du}{Q_0^2} \right), \end{aligned} \quad (12.21)$$

где  $\alpha$  — наименьший корень уравнения

$$J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \tau^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} \tau^{3/2} \right) = 0.$$

Для сопряжения с решением  $y$  (12.15), определенным для области III, необходимо, чтобы величина  $\varepsilon^{-2/3}Q_1(u)$  была ограниченной при  $u = Q(\varepsilon^y)$ .

Анализируя выражение для  $Q_n(u)$ , убеждаемся, что ряд (12.20) сохраняет асимптотический характер до значений  $u$ , ограниченных условием  $Q(u) < Q(\varepsilon^{2/3})$ , т. е. при значениях  $x$ , удовлетворяющих условию  $O(x-1) < O(1)$ , и, таким образом, области, в которых пригодны решения (12.20) и (12.15), перекрываются.

Теперь нам осталось сопрячь решения для областей I и IV. Для этого мы должны сопрячь решение (12.6) с решением (12.20), учитывая в последнем замену переменных (12.18).

Заметим, что так как  $y > 0$  при  $x = -1$ , то постоянная  $c$  должна быть больше  $\frac{2}{3}$ .

Положим  $c = \frac{2}{3} + \gamma$ . Определим порядок  $\gamma$ ; так как  $y(-1) = O(\varepsilon^{-1/3})$ , то  $\varepsilon\gamma$  тоже будет порядка  $\varepsilon^{-1/3}$  и, следовательно,  $\gamma = O(\varepsilon^{-4/3})$ .

Нетрудно показать, что ряд (12.6) сохраняет асимптотический характер до значений  $x$ , удовлетворяющих условию  $O(x-1) > O(\varepsilon^{-1/3})$ , и, таким образом, области, в которых пригодны решения (12.20) и (12.6), перекрываются, причем асимптотическая сходимость этих разложений обеспечена для  $x = -1 + \varepsilon^{-1/3}$ .

Таким образом, постоянную интегрирования  $c$  можно определить, приравнивая при  $x = -1 + \varepsilon^{-1/3}$  значения  $y$ , полученные из формул (12.20) и (12.6):

$$\varepsilon^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2/3 n} Q_n(-\varepsilon^{-1/3}) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{-2n} f_n(-1 + \varepsilon^{-1/3}). \quad (12.22)$$

Определяя из этого соотношения  $\gamma$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon^{-8/3}$ , получим:

$$\gamma \approx a\varepsilon^{-4/3} - \frac{4}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + \left( b_0 - 1 - \frac{2}{3} \ln \frac{3}{2} \right) \varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-8/3}), \quad (12.23)$$

где  $b_0 = b_0(a)$  — известная величина.

Определив постоянную  $c = \frac{2}{3} + \gamma$ , легко находим  $x_1$  — корень уравнений  $f_0(x_1) = 0$ , после чего, воспользовавшись уравнениями (12.12), получаем амплитуду автоколебаний

$$a \approx 2 + \frac{a}{3} \varepsilon^{-4/3} - \frac{16 \ln \varepsilon}{27 \varepsilon^2} + \frac{1}{9} (3b_0 - 1 + 2 \ln 2 - 8 \ln 3) \varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-8/3}). \quad (12.24)$$

Период автоколебаний может быть вычислен согласно формуле

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{y(x)}. \quad (12.25)$$

Для этого разбиваем весь промежуток интегрирования на пять частей соответственно различным областям:

1) от  $-a$  до  $-x_2$  — по области II, где  $x_2$  — значение  $x$ , полученное по формуле (12.10) при значении

$$z = \frac{(1-\varepsilon^{-4/3}) a}{a^2-1};$$

2) от  $-x_2$  до  $-(1+\varepsilon^{-1/3})$  по области III;

3) от  $-(1+\varepsilon^{-1/3})$  до  $-(1-\varepsilon^{-1/3})$  по области IV;

4) от  $-(1-\varepsilon^{-1/3})$  до  $x^*$  по области I, где  $x^*$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} x^* = x_1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{x_1^2-1} - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{x_1}{(x_1^2-1)^2} - \\ - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \frac{x_1}{(x_1^2-1)^2} \ln x_1 (x_1^2-1) - \frac{g}{x_1^2-1} + \frac{x_1}{(x_1^2-1)^3} \right] - \\ - \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{2x_1}{(x_1^2-1)^4} + O(\varepsilon^{-3}); \end{aligned} \quad (12.26)$$

5) от  $x^*$  до  $a$  по области II.

Тогда полный период  $T$  будет равен

$$T = 2 [T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5], \quad (12.27)$$

где  $T_i$  — часть интеграла (12.25), взятая соответственно для  $i$ -го промежутка интегрирования.

Произведя интегрирование для полного периода, получаем:

$$T \approx (3 - 2 \ln 2) \varepsilon + 3\alpha\varepsilon^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + \\ + \left( 3 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6} + b_0 - 2d \right) \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-4/3}) \quad (12.28)$$

или, подставляя численные значения коэффициентов:

$$T \approx 1,613706\varepsilon + 7,01432\varepsilon^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} + 0,0087\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-4/3}). \quad (12.29)$$

При достаточно большом  $\varepsilon$  можно в этой формуле пренебречь всеми членами, за исключением первого, в результате чего получим асимптотическое выражение для периода, совпадающего с формулой (11.10), найденной в предыдущем параграфе.

Для асимптотических решений (12.6), (12.10), (12.15) и (12.20) можно без затруднений доказать методом последовательных приближений сходимость (асимптотическую) в соответствующих областях.

Уже из рассмотрения полученных здесь асимптотических формул становится ясным, что случай большого  $\varepsilon$  значительно сложнее, чем случай малого  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon \ll 1$  мы имели чисто степенные асимптотические формулы. Здесь же для  $\varepsilon \gg 1$  в них входят дробные степени, логарифмические члены. В случае  $\varepsilon \gg 1$  имеется большая чувствительность к конкретному виду уравнения, чем в случае  $\varepsilon \ll 1$ . Естественно поэтому, что при больших значениях нелинейности фактическое построение приближенных решений требует большей конкретизации изучаемых дифференциальных уравнений.

Заметим, что для исследования этой важной и трудной проблемы нахождения асимптотических приближений при наличии большого параметра (или малого параметра перед старшей производной) можно с успехом применять эффективные асимптотические методы, разработанные А. Н. Тихоновым [43] и его учениками.

## ГЛАВА III

### ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

#### § 13. Асимптотические разложения в «нерезонансном» случае

Перейдем теперь к рассмотрению колебательных систем, находящихся под воздействием внешних периодических сил, зависящих явно от времени.

Будем рассматривать систему с одной степенью свободы, для которой дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (13.1)$$

где  $\epsilon$  — малый положительный параметр,  $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  — функция, периодическая по отношению к  $\nu t$  с периодом  $2\pi$ , которая может быть представлена в виде

$$f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (13.2)$$

При этом будем предполагать, что коэффициенты  $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  в конечной сумме (13.2) являются некоторыми полиномами по отношению к  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ .

Рассматриваемое уравнение (13.1) может быть, очевидно, интерпретировано как уравнение колебаний некоторой механической системы единичной массы с собственной частотой  $\omega$ , находящейся под воздействием малого нелинейного возмущения  $\epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ , явно зависящего от времени. С многочисленными примерами колебательных систем, описываемых уравнением такого вида, мы уже познакомились во введении.

Прежде чем переходить к изложению методов нахождения асимптотических решений для системы, описываемой уравнением (13.1), остановимся еще раз на анализе влияния периодического воздействия на систему, исходя из физических соображений.

При отсутствии возмущения, т. е. при  $\epsilon = 0$ , получаем чисто гармонические колебания:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $a$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные.

Очевидно, что если мы, применяя метод, изложенный в предыдущей главе, будем определять функции  $u_1, u_2, \dots$ , то, ввиду зависимости внешнего воздействия от времени, в разложении функции  $\epsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$

(после подстановки в нее  $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$ ) в ряд Фурье, благодаря ее периодичности по  $\omega t$ , появятся члены, содержащие  $\sin(n\omega t + m\omega t)$  и  $\cos(n\omega t + m\omega t)$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа. Таким образом, в правых частях дифференциальных уравнений, определяющих  $u_1, u_2, \dots$ , появляются гармонические компоненты с комбинационными частотами вида  $(n\omega) + m\omega$ .

Совершенно ясно, что когда одна из таких комбинационных частот сделается близкой к собственной частоте системы, то соответствующая гармоника возмущающей силы может оказать значительное влияние на характер колебания, даже если в выражении приложенной возмущающей силы соответствующий коэффициент является малым (амплитуда соответствующей гармоники мала). Разумеется, чем меньше этот коэффициент, тем меньше должна быть расстройка между собственной и внешней частотой для того, чтобы это влияние было заметным. Таким образом, как это уже нами было установлено выше, в нелинейных колебательных системах резонансные явления имеют место не только при  $\nu \approx \omega$ , как в обычных линейных системах, но и в случае, если одна из комбинационных частот внешнего воздействия близка к собственной частоте системы, т. е. если  $n\omega + m\omega \approx \omega$ .

Таким образом, в нелинейных системах резонанс может наступить при выполнении условия

$$\nu \approx \frac{p}{q} \omega, \quad (13.3)$$

где  $p$  и  $q$  — целые взаимно простые числа (обычно небольшие).

Введем следующую классификацию различных случаев резонанса:

1)  $p = q = 1$ , т. е.  $\nu \approx \omega$ ; такой случай будем называть «главным» или обыкновенным резонансом;

2)  $q = 1$ , т. е.  $\nu \approx p\omega$  или  $\omega \approx \frac{\nu}{p}$ ; такой случай будем называть резонансом на обертоне собственной частоты, или демультипликационным резонансом (дробным, поскольку колебания здесь совершаются с частотой, равной дробной части внешней частоты), или параметрическим резонансом. Резонанс этого типа возможен и в линейных системах с периодическими коэффициентами;

3)  $p = 1$ , т. е.  $\omega \approx q\nu$ ; такой случай будем называть резонансом на обертоне внешней частоты.

Здесь необходимо отметить следующее обстоятельство. Так как  $p$  и  $q$  могут принимать всевозможные целочисленные значения, то множество  $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$  является плотным и, следовательно, отношение  $\frac{p}{q}$  при соответствующем выборе чисел  $p$  и  $q$  может приблизиться к любому наперед заданному числу. Поэтому может создаться впечатление, что в нелинейной системе возможен резонанс при произвольных  $p$  и  $q$ . В действительности же это не так, потому что не все возможности, указанные формулой (13.3), осуществимы, иначе говоря, не при всяких  $p$  и  $q$  имеет место соответствующий резонанс. Практически разложение (13.2) имеет конечное число членов, и числа  $p$  и  $q$  вполне определяются характером исследуемой колебательной системы.

Выясним теперь, какие резонансы проявляются в первом приближении.

Как и обычно, будем предполагать, что колебания в первом приближении остаются по форме чисто гармоническими и на каждом отдель-

ном цикле с достаточной точностью могут приближаться обыкновенной гармоникой; малая же возмущающая сила, какой бы сложной структуры она ни была, может влиять на ход колебаний, вызывая лишь медленное, но систематическое изменение амплитуды и фазы колебания (медленное по сравнению с естественной единицей времени — с периодом цикла).

По определению резонанса можем считать, что резонанс как раз и характеризуется тем фактом, что малая возмущающая сила может приводить к значительному, часто весьма большому изменению амплитуды колебаний. Это имеет место тогда, когда работа, совершаемая внешней силой за цикл колебания, не уничтожается, так как в противном случае внешняя сила вызывала бы лишь малые дрожания.

Выражение возмущающей силы  $\epsilon f(vt, x, \frac{dx}{dt})$  в режиме гармонических колебаний (т. е. при  $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$ ) содержит, как указывалось выше, различные гармоники с частотами  $\pm nv \pm m\omega$ .

Составим выражение виртуальной работы, которую совершила бы эта возмущающая сила в режиме гармонических колебаний на виртуальных перемещениях

$$\delta x_0 = \delta a \cos(\omega t + \varphi) - \delta \varphi a \sin(\omega t + \varphi), \quad (13.4)$$

соответствующих виртуальному приращению амплитуды и фазы колебания.

Для подсчета удобно выражение виртуальной работы в режиме гармонических колебаний

$$\epsilon f(vt, x_0, \frac{dx_0}{dt}) \delta x_0 \quad (13.5)$$

представить с помощью ряда Фурье в виде суммы гармонических членов с частотами

$$\lambda_{nm} = nv + m\omega.$$

Но при усреднении этой суммы за достаточно большой промежуток времени в ней останутся заметными лишь те члены, у которых частоты  $\lambda_{nm}$  будут соответственно малыми.

Таким образом, в первом приближении проявляются только такие резонансы, для которых частоты в выражении виртуальной работы (13.5) достаточно близки к нулю. Разумеется, интенсивность резонанса будет тем слабее, чем меньше будет соответствующая амплитуда в выражении (13.5).

После этих предварительных замечаний перейдем к оформлению методов фактического построения приближенных решений.

Нацнем рассмотрение колебательной системы, описываемой уравнением (13.1), сначала для нерезонансного случая, как наиболее простого, т. е. будем предполагать, что ни одна из комбинационных частот  $(nv + m\omega)$ , входящих в рассматриваемое приближение, не равна (и не близка) частоте  $\omega$ :

$$nv + m\omega \neq \omega. \quad (13.6)$$

Здесь следует указать на известный в теории чисел факт. Если  $\frac{v}{\omega}$  иррационально, то всегда можно подобрать такие целые  $n$  и  $m$ ,

что выражение

$$n\omega + (m - 1)\omega$$

будет сколь угодно близким к нулю.

Поэтому, если в выражении рассматриваемого приближенного решения будут присутствовать гармоники со всеми линейными комбинациями  $n\omega + m\omega$ , то придется наложить условие, чтобы отношение  $\frac{\nu}{\omega}$  аппроксимировалось рациональным числом не слишком быстро и не вызвало расходимости рассматриваемого выражения. (См. по этому поводу стр. 167.)

Приступая к построению приближенного решения дифференциального уравнения (13.1), будем исходить, как и в случае возмущения, не содержащего явно времени, из тех же самых интуитивных соображений.

При полном отсутствии возмущающих сил ( $\varepsilon = 0$ ) колебания, очевидно, будут чисто гармонические  $x = a \cos \phi$  с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом  $\frac{da}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt} = \omega$ .

Влияние возмущающей силы выражается в том, что, во-первых, в колебаниях могут появиться как обертон, так и гармоники комбинационных частот различного порядка малости, и поэтому решение надо искать в виде

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi, \nu t) + \varepsilon^2 u_2(a, \phi, \nu t) + \dots, \quad (13.7)$$

где функции  $u_1(a, \phi, \nu t)$ ,  $u_2(a, \phi, \nu t)$ , ... периодические по обеим угловым переменным  $\phi$  и  $\nu t$  с периодом  $2\pi$ .

Во-вторых, и амплитуда, и скорость вращения фазы уже не могут быть постоянными, а должны определяться, как и в предыдущей главе, дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

Правые части этих уравнений должны зависеть только от амплитуды, так как при отсутствии резонанса фаза собственных колебаний не связана с фазой внешних сил, и поэтому последняя не оказывает влияния ни на амплитуду колебания, ни на полную фазу колебания. Разумеется, в резонансном случае нам надо будет как в выражение для мгновенной частоты, так и в выражение для мгновенной амплитуды ввести зависимость от сдвига фаз.

Итак, задача построения приближенных решений уравнения (13.1) в нерезонанском случае сводится к задаче, аналогичной рассмотренной в первом параграфе: требуется найти функции

$$u_1(a, \phi, \nu t), u_2(a, \phi, \nu t), \dots, A_1(a), A_2(a), \dots, B_1(a), B_2(a), \dots$$

таким образом, чтобы выражение (13.7), в которое вместо  $a$  и  $\phi$  будут подставлены функции времени, определенные уравнениями (13.8), оказалось решением нашего исходного уравнения (13.1).

Как и в первом параграфе, после решения этой задачи, т. е. после того, как будут найдены явные выражения для коэффициентов разложений, стоящих в правых частях (13.7), (13.8), вопрос об интегриро-

вании уравнения (13.1) сводится к более простому вопросу интегрирования уравнений (13.8). Следует заметить, что в нерезонансном случае для определения  $a$  и  $\psi$  мы получаем уравнения с разделяющимися переменными; в резонансных случаях, как увидим ниже, в этих уравнениях переменные в общем случае уже не будут разделяться.

Прежде чем приступить к построению функций  $u_1(a, \phi, vt)$ ,  $u_2(a, \phi, vt)$ , ...,  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$ , ...,  $B_1(a)$ ,  $B_2(a)$ , ..., необходимо для однозначности определения коэффициентов разложений (13.8) ввести, как и выше, некоторые дополнительные условия.

В качестве таких условий естественно принять условия отсутствия резонансных членов в функциях  $u_1(a, \phi, vt)$ ,  $u_2(a, \phi, vt)$ , ..., т. е. членов, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

Это условие равносильно требованию отсутствия в функциях  $u_1(a, \phi, vt)$ ,  $u_2(a, \phi, vt)$ , ... первой гармоники аргумента  $\phi$ , а с физической точки зрения соответствует выбору в качестве величины  $a$  полной амплитуды основной гармоники колебания.

После этих предварительных замечаний перейдем к определению функций  $u_1(a, \phi, vt)$ ,  $u_2(a, \phi, vt)$ , ...,  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$ , ...,  $B_1(a)$ ,  $B_2(a)$ , ..., учитывая вышеприведенное дополнительное условие.

Дифференцируя (13.7), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ \cos \phi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ + \left\{ -a \sin \phi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\} \frac{d\psi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \dots, \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \left\{ \cos \phi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{d^2a}{dt^2} + \\ & + \left\{ -a \sin \phi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} + \dots \right\} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \\ & + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \left\{ -a \cos \phi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \dots \right\} \times \\ & \times \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + 2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ & + 2 \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial \psi} + \dots \right\} \frac{d\psi}{dt} + \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$+ 2 \left\{ -\sin \phi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \psi} + \dots \right\} \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots \quad (13.10)$$

Заменив в (13.10)  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{d^2a}{dt^2}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$ ,  $\frac{d^2\psi}{dt^2}$  их выражениями по формулам (13.8) и формулам (1.10) первого параграфа, подставляем найденные значения  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , а также (13.7) в левую часть уравнения (13.1), после чего, располагая результат по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = & \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} \omega + \omega^2 u_1 - 2a\omega B_1 \cos \phi - 2\omega A_1 \sin \phi \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \omega^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi \partial t} \omega + \omega^2 u_2 - 2a\omega B_2 \cos \phi - 2\omega A_2 \sin \phi + \right. \\ & \left. + \left( A_1 \frac{dA_1}{da} - aB_1^2 \right) \cos \phi - \left( aA_1 \frac{dB_1}{da} + 2A_1 B_1 \right) \sin \phi + \right. \\ & \left. + 2\omega A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (13.11) \end{aligned}$$

Правую часть уравнения (13.4) согласно (13.7) и (13.9) можем представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon f \left( vt, x, \frac{dx}{dt} \right) &= \varepsilon f(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 [f'_x(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + \\ &+ f''_{xx}(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times \\ &\times \left( A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)] + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

Для того чтобы искомое выражение (13.7) удовлетворяло исходному уравнению (13.1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$  (как и выше, будем ограничиваться нахождением  $m$ -го приближения), необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в правых частях (13.11) и (13.12) до членов  $m$ -го порядка включительно.

В результате получим систему  $m$  уравнений для определения  $u_1(a, \psi, vt), u_2(a, \psi, vt), \dots, u_m(a, \psi, vt)$ , а также  $A_1(a), A_2(a), \dots, A_m(a), B_1(a), B_2(a), \dots, B_m(a)$ :

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 = f_0(a, \psi, vt) + 2a\omega B_1 \cos \psi + 2\omega A_1 \sin \psi, \quad (13.13)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 u_2 &= f_1(a, \psi, vt) + 2a\omega B_2 \cos \psi + 2\omega A_2 \sin \psi, \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (13.14)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u_m}{\partial \psi \partial t} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \omega^2 u_m &= f_{m-1}(a, \psi, vt) + 2a\omega B_m \cos \psi + 2\omega A_m \sin \psi, \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (13.14)$$

где для сокращения обозначено

$$f_0(a, \psi, vt) = f(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi),$$

$$\begin{aligned} f_1(a, \psi, vt) &= f'_x(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + f''_{xx}(vt, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times \\ &\times \left[ A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right] + \left( aB_1^2 - \frac{dA_1}{da} A_1 \right) \cos \psi + \\ &+ \left( \frac{dB_1}{da} A_1 a + 2A_1 B_1 \right) \sin \psi - 2\omega B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \\ &- 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} A_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} \omega A_1, \quad (13.15) \end{aligned}$$

Очевидно, что функции  $f_k(a, \psi, vt)$  являются периодическими функциями с периодом  $2\pi$  по обоим аргументам  $\psi$  и  $vt$  и, кроме того, зависят от  $a$ . Явное выражение для этих функций известно, как только найдены значения  $A_j(a), B_j(a), u_j(a, \psi, vt)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Прежде чем переходить к определению интересующих нас функций, приведем краткие сведения из теории кратных рядов Фурье.

Если  $f(x)$  — некоторая периодическая функция  $x$  с периодом  $2\pi$  (в случае произвольного периода  $2l$  мы всегда можем путем линейного преобразования над  $x$  привести к периоду  $2\pi$ ), то, как известно, при определенных ограничениях она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}, \quad (13.16)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi. \quad (13.17)$$

Во многих случаях удобнее пользоваться рядом Фурье в комплексной форме.

В этом случае  $f(x)$  можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (13.18)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-inx} d\xi. \quad (13.19)$$

(Здесь индекс  $n$  принимает не только целые положительные, но и отрицательные значения.) При этом получаем следующую связь между коэффициентами Фурье (13.19) и (13.17):

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \quad (13.20)$$

Возьмем теперь функцию  $f(x, y)$  периодическую, с периодом  $2\pi$ , по обеим переменным  $x$  и  $y$ .

Рассматривая формально  $f(x, y)$  как функцию от  $x$ , имеем:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y) e^{inx}, \quad (13.21)$$

где

$$c_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, y) e^{-inx} d\xi. \quad (13.22)$$

Функция  $c_n(y)$  в свою очередь может быть разложена в ряд вида

$$c_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{imy}, \quad (13.23)$$

где

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_n(\eta) e^{-im\eta} d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, \eta) e^{-i(n\xi+m\eta)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (13.24)$$

Подставив полученное выражение для  $c_n(y)$  в формулу (13.21) имеем:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \quad (13.25)$$

или сокращенно следующую формулу:

$$f(x, y) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \quad (13.26)$$

которая обобщает ряд Фурье на случай двух переменных.

Таким же образом, для периодической функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  от  $N$  независимых переменных периода  $2\pi$  относительно каждой из переменных получим:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2 \dots n_N} e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_N x_N)}, \quad (13.27)$$

где

$$\begin{aligned} c_{n_1 n_2 \dots n_N} &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \\ &\dots \int_0^{2\pi} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) e^{-i(n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \dots + n_N \xi_N)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Приведенная комплексно-экспоненциальная форма кратного ряда Фурье весьма удобна для расчетов. Следует, однако, подчеркнуть, что она совершенно эквивалентна обычной форме разложения по синусам и косинусам, так что условия сходимости будут те же самые.

Приступим теперь к определению  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$  и  $u_1(a, \phi, vt)$  из уравнения (13.13). Для этого разложим  $f_0(a, \phi, vt)$  в двойной ряд Фурье:

$$f_0(a, \phi, vt) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i(nvt + m\phi)}, \quad (13.29)$$

где

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \phi, -a \sin \phi) e^{-i(n\theta + m\phi)} d\theta d\phi.$$

Представим  $u_1(a, \phi, vt)$  в виде ряда Фурье:

$$u_1(a, \phi, vt) = \sum_n \sum_m \bar{f}_{nm}(a) e^{i(nvt + m\phi)} \quad (13.30)$$

Подставляя в уравнение (13.13) значение  $f_0(a, \phi, vt)$  (13.29) и  $u_1(a, \phi, vt)$  (13.30), имеем:

$$\sum_n \sum_m \{\omega^2 - (nv + m\omega)^2\} \bar{f}_{nm}(a) e^{i(nvt + m\phi)} = \\ = 2a\omega B_1 \cos \phi + 2\omega A_1 \sin \phi + \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i(nvt + m\phi)}. \quad (13.31)$$

Из (13.31) необходимо определить  $\bar{f}_{nm}(a)$ ,  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  так, чтобы  $u_1(a, \phi, vt)$  не содержало резонансных членов. Последнее условие будет выполнено, если  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  определить из соотношения:

$$2a\omega B_1 \cos \phi + 2\omega A_1 \sin \phi = - \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i(nvt + m\phi)}. \quad (13.32)$$

[ $\omega^2 - (nv + m\omega)^2 = 0$ ]

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в выражении (13.31), получим

$$\bar{f}_{nm}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2}$$

для всех  $n$  и  $m$ , удовлетворяющих неравенству

$$\omega^2 - (nv + m\omega)^2 \neq 0$$

или, ввиду того, что мы рассматриваем нерезонансный случай, неравенству

$$n^2 + (m^2 - 1)^2 \neq 0 \quad (\text{т. е. } n \neq 0, m \neq \pm 1).$$

Подставляя найденное значение  $\bar{f}_{nm}(a)$  в (13.30) и делая для упрощения замену  $vt = \theta$ , получаем для  $u_1(a, \phi, vt)$  следующее выражение:

$$u_1(a, \phi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \sum_m \frac{e^{i(n\theta + m\phi)}}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) e^{-i(n\theta + m\phi)} d\theta d\phi \quad (13.33)$$

или, переходя к тригонометрическим функциям:

$$u_1(a, \phi, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n, m} \left\{ \frac{\cos(n\theta + m\phi)}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \times \right. \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) \cos(n\theta + m\phi) d\theta d\phi + \\ \left. + \frac{\sin(n\theta + m\phi)}{\omega^2 - (nv + m\omega)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) \sin(n\theta + m\phi) d\theta d\phi \right\}. \quad (13.34)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в (13.32), находим выражения для  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$ <sup>\*)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) \sin \phi d\theta d\phi, \\ B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2\omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) \cos \phi d\theta d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (13.35)$$

После определения  $u_1(a, \phi, \theta)$ ,  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  мы в соответствии с (13.15) имеем явное выражение для  $f_1(a, \phi, \theta)$ . Разлагая его в ряд Фурье и воспользовавшись уравнением (13.14), а также, учитывая условие отсутствия резонансных членов в выражении для  $u_2(a, \phi, \theta)$ , аналогично найдем  $u_2(a, \phi, \theta)$ ,  $A_2(a)$ ,  $B_2(a)$ , необходимые для построения второго приближения. После ряда выкладок имеем:

$$u_2(a, \phi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \sum_m \frac{e^{i(n\theta+m\phi)}}{\omega^2 - (nv+m\omega)^2} \times \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \phi, \theta) e^{-i(n\theta+m\phi)} d\theta d\phi, \quad (13.36)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega} \left[ \frac{dB_1}{da} aA_1 + 2A_1B_1 \right] - \\ &\quad -\frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f'_x(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) u_1 + \right. \\ &\quad \left. + f'_{x'}(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \left( A_1 \cos \phi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - aB_1 \sin \phi + \frac{\partial u_1}{\partial \phi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} v \right) \right\} \sin \phi d\theta d\phi, \end{aligned} \right\} \quad (13.37)$$

$$\left. \begin{aligned} B_2(a) &= \frac{1}{2a\omega} \left[ \frac{dA_1}{da} A_1 - aB_1^2 \right] - \\ &\quad -\frac{1}{4\pi^2\omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f'_x(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) u_1 + \right. \\ &\quad \left. + f'_{x'}(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \left( A_1 \cos \phi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - aB_1 \sin \phi + \frac{\partial u_1}{\partial \phi} \omega + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} v \right) \right\} \cos \phi d\theta d\phi. \end{aligned} \right\}$$

Продолжая изложенный процесс последовательного определения интегралов, нас выражений, можно построить решение уравнения (13.1) в любом приближении.

Заметим, что, исходя из рассуждений, аналогичных приведенным в главе I, здесь также не имеет смысла при построении  $n$ -го приближения удерживать в правой части ряда (13.7) член порядка малости  $\epsilon^n$ .

<sup>\*)</sup> Правая часть выражения (13.32), как легко заметить, содержит только первую гармонику угла  $\phi$ .

Заканчивая рассмотрение нерезонансного случая, заметим, что согласно формулам (13.35) в уравнения первого приближения войдет лишь свободный член  $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  разложения (13.2) возмущающей силы  $f\left(0, x, \frac{dx}{dt}\right)$ .

На основании (13.2) имеем тождественно:

$$f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) d\tau. \quad (13.38)$$

Поэтому для получения уравнений первого приближения мы можем усреднить возмущающую силу по явно содержащемуся в ней времени, после чего воспользоваться формулами первого параграфа (1.27).

Так как в рассматриваемом нерезонансном случае уравнения первого приближения (а также и высших приближений) имеют ту же форму, что и уравнения первого приближения для случая (1.1) (т. е. для случая, когда внешние возмущающие силы не зависят явно от времени), которые уже были нами подробно исследованы, то мы не будем останавливаться здесь на их изучении.

Остановимся только на рассмотрении выражения для  $x$  во втором приближении:

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \phi, \theta), \quad (13.39)$$

где  $u_1(a, \phi, \theta)$  определяется формулой (13.33) или (13.34).

В нерезонансном случае согласно формулам (13.39) и (13.34) влияние внешнего периодического воздействия оказывается только во втором приближении. Так, например, из формулы (13.39) непосредственно следует, что только во втором приближении в решении могут появиться различные комбинационные гармоники, компоненты с частотами вынуждающей силы различной кратности и т. д. Амплитуды всех этих дополнительных гармоник будут порядка малости  $\varepsilon$ .

Рассмотрим еще формулу (13.39) в случае стационарных колебаний:

$$a = \text{const}, \quad \phi = \omega(a)t + \theta, \quad \theta = \text{const}. \quad (13.40)$$

В этом случае колеблющаяся величина  $x$  состоит из собственного колебания с частотой  $\omega(a)$  (представляемого членом  $a \cos [\omega(a)t + \theta]$ ), вынужденных колебаний с частотами  $n\nu$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) и комбинационных колебаний с частотами  $n\nu \pm m\omega$  ( $n, m = 1, 2, 3, \dots$ ). При этом интенсивность комбинационного колебания с частотой  $n\nu \pm m\omega$  усиливается по мере приближения к соответствующему резонансу, т. е. по мере уменьшения соответствующего делителя

$$\omega^2 - (n\nu \pm m\omega)^2.$$

В частном случае, когда собственные колебания отсутствуют, т. е. когда  $a = 0$ , формула (13.39) вырождается в следующую:

$$x = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta}{\omega^2 - n^2\nu^2}, \quad (13.41)$$

где обозначено:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, 0, 0) \cos n\theta d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\theta, 0, 0) \sin n\theta d\theta.$$

Таким образом, при  $a=0$  в колебательной системе имеются лишь одни вынужденные колебания с частотами внешнего возбуждения  $n\nu$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

Поэтому в данном случае имеем дело с чисто вынужденными колебаниями. Режимы колебаний, соответствующие формуле (13.41), называются иногда гетеропериодическими, так как периоды всех гармоник колебания навязаны системе извне.

Если исследуемая колебательная система такова, что для не зависящей явно от времени слагающей  $\varepsilon f_0(x, \frac{dx}{dt})$  возмущающей функции  $\varepsilon f(\theta, x, \frac{dx}{dt})$  эквивалентный коэффициент затухания положителен:

$$\lambda_e^*(a) > 0, \quad (13.42)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_e^*(a) &= \frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\theta d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \end{aligned}$$

то (см. § 7)

$$a(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

и поэтому при выполнении неравенства (13.42) всякое колебание приближается к гетеропериодическому, так что гетеропериодический режим будет единственным возможным стационарным режимом.

Полученное условие (13.42) затухания собственных колебаний, вообще говоря, зависит от амплитуды внешней периодической силы. При отсутствии внешнего возбуждения, т. е. в случае, когда правая часть уравнения (13.1) не зависит явно от времени, мы получаем обычное условие самовозбуждения

$$\lambda_e(a) < 0 \quad (13.43)$$

и соответственно условие затухания

$$\lambda_e(a) > 0, \quad (13.44)$$

где

$$\lambda_e(a) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(0, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi^*.$$

---

\*)  $f(0, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi)$  обозначает возмущающую силу  $f(\theta, x, \frac{dx}{dt})$ , в которой положено  $x=a \cos \phi$ ,  $\frac{dx}{dt}=-a\omega \sin \phi$ , а амплитуды внешних периодических компонент равны нулю.

В зависимости от структуры нелинейной функции  $f\left(\theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$  может получиться, что одновременно выполняются условия (13.43) и (13.42). Тогда окажется, что система, являющаяся самовозбужденной при отсутствии внешнего периодического воздействия, теряет самовозбуждение при наличии внешнего периодического воздействия. В этом случае мы имеем дело с так называемым нерезонансным или асинхронным гашением.

Аналогично может представиться также и противоположный случай асинхронного возбуждения.

В начале предыдущего параграфа мы предположили, что правая часть исследуемого дифференциального уравнения (13.1)  $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  — периодическая функция по  $t$  с периодом  $\frac{2\pi}{\nu}$  и, кроме того, может быть представлена в виде конечной суммы (13.2), в которой коэффициенты  $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  являются некоторыми полиномами по отношению к  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ .

Если сделать более общее допущение, предположив, что функция  $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда

$$f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (13.45)$$

в котором  $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  — некоторые произвольные регулярные функции  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ , то в выражение для  $u_1(a, \phi, \theta), u_2(a, \phi, \theta), \dots$  вместо конечных двойных сумм войдут двойные бесконечные ряды типа

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n\theta+m\phi)}}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) e^{-i(n\theta+m\phi)} d\theta d\phi. \quad (13.46)$$

Благодаря присутствию делителей вида  $\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2$  эти ряды, вообще говоря, будут расходящимися.

Как известно, в общем случае точки расходимости рядов такого вида на оси  $\nu$  (т. е. значения  $\nu$ , при котором ряд расходится) образуют всюду плотное множество.

Таким образом, каково бы ни было значение  $\nu$ , всегда можно найти сколь угодно близкое к нему значение  $\nu_0$ , для которого ряд (13.46) расходится.

С другой стороны, заметим, что для почти всякого значения отношения  $\frac{\nu}{\omega}$  (т. е. за возможным исключением множества меры нуль) мы можем найти \*) такие  $C$  и  $\delta$ , что

$$\left| \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{(|p| + |q|)^{2+\delta}}$$

при любых целых  $p, q$ .

\*) Действительно, фиксируем некоторое положительное  $\delta$  и сколь угодно малое положительное  $\eta$ . Возьмем положительное  $C$  так, чтобы

$$2C \sum_{|n|+|m|\geq 1} \frac{1}{(|n| + |m|)^{2+\delta}} \leq \eta,$$

Но тогда

$$|n\omega + (m \pm 1)\omega| \geq \frac{C_\omega}{n^{\delta+1}},$$

и по абсолютному значению каждый член ряда (13.46) будет соответственно меньше, чем

$$\frac{n^{\delta+1}}{C_\omega} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \phi, \theta) e^{-i(n\theta+m\phi)} d\theta d\phi \right|.$$

Поэтому данный ряд будет абсолютно сходящимся, если только  $f_0(a, \phi, \theta)$  обладает по отношению к угловым переменным  $\phi, \theta$  достаточным числом непрерывных частных производных.

Однако, чтобы не вдаваться в такие теоретико-числовые тонкости, целесообразно в практических приложениях не доводить дело до появления бесконечных сумм гармонических слагающих и отнести остаток ряда к высшим степеням  $\varepsilon$ .

Иначе говоря, удобнее исходить из уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f_0\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon^2 f_1\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon^3 \dots, \quad (13.47)$$

в которых  $f_0\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), f_1\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \dots$  являются уже конечными суммами типа (13.2).

Распространение же изложенной методики построения приближенных решений применительно к уравнению (13.47) не представляет никаких затруднений.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретного примера.

Рассмотрим обобщенное уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y - \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} = E \sin \nu t, \quad (13.48)$$

где  $\varepsilon$  — некоторый малый положительный параметр.

Это уравнение, как указывалось выше, путем замены

$$y = x + U \sin \nu t, \quad (13.49)$$

где  $U = \frac{E}{1 - \nu^2}$  (мы рассматриваем нерезонансный случай, следовательно,  $\nu$  не равно и не близко к единице), приводится к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon [1 - (x + U \sin \nu t)^2] \left( \frac{dx}{dt} + U \nu \cos \nu t \right). \quad (13.50)$$

и построим множество интервалов  $I_{nm}$  (для любых целых положительных и отрицательных  $n, m$ ) с центром в точках  $\frac{n}{m}$  и длинами  $\frac{2C}{(|n| + |m|)^{2+\delta}}$ .

С одной стороны, видно, что для любого числа  $x$ , не принадлежащего ни к одному из интервалов  $I_{n,m}$ , выполняется при любых целых  $n, m$  неравенство

$$\left| x - \frac{n}{m} \right| > \frac{C}{(|n| + |m|)^{2+\delta}}. \quad (\alpha)$$

С другой стороны, множество  $x$ , которое принадлежит к одному из интервалов  $I_{n,m}$ , имеет меру, меньшую чем

$$\sum_{n,m} \text{mes } I_{n,m} \leq \eta.$$

Таким образом, для всех  $x$ , за возможным исключением  $x$ , принадлежащих к множеству меры, меньшей  $\eta$ , выполняются неравенства (α).

Воспользовавшись формулами (13.35), получим решение уравнения (13.50) в первом приближении:

$$x = a \cos(t + \vartheta), \quad (13.51)$$

где  $\vartheta = \text{const}$ , а  $a$ , очевидно, должно быть определено из уравнения

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2} \right). \quad (13.52)$$

Уравнение первого приближения (13.52) показывает, что при

$$U^2 < 2 \quad (13.53)$$

система самовозбуждена, и существует устойчивый стационарный режим колебаний, соответствующий амплитуде

$$a^2 = 4 - 2U^2.$$

При

$$U^2 > 2 \quad (13.54)$$

амплитуда  $a$  с возрастанием  $t$  стремится к нулю и, следовательно, в системе происходит асинхронное гашение.

Найдем теперь решение уравнения (13.50) во втором приближении. Воспользовавшись формулами (13.39) и (13.37), имеем:

$$\begin{aligned} x = a \cos \psi + & \frac{\varepsilon U \nu (4 - U^2 - 2a^2)}{4(1-\nu^2)} \cos \theta + \frac{\varepsilon U^3 \nu}{4(1-9\nu^2)} \cos 3\theta + \\ & + \frac{\varepsilon U a^2 (2+\nu)}{4(1+\nu)(3+\nu)} \cos(\theta + 2\psi) + \frac{\varepsilon U a^2 (2+\nu)}{4(1-\nu)(3-\nu)} \cos(\theta - 2\psi) + \\ & + \frac{\varepsilon U^2 a (2+\nu)}{16\nu(1+\nu)} \sin(2\theta + \psi) + \frac{\varepsilon U^2 a (1-2\nu)}{16\nu(1-\nu)} \sin(2\theta - \psi) - \frac{a^3}{32} \sin 3\psi, \end{aligned} \quad (13.55)$$

где  $a$  и  $\psi$  должны удовлетворять системе уравнений второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2} \right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7a^4}{256} \right) + \frac{\varepsilon^2 U^2 (5\nu - 1)}{8(1-\nu^2)} + \\ & + \frac{\varepsilon^2 U^2 a^2 (7\nu^4 - 40\nu^2 + 32\nu - 9)}{32(9-\nu^2)(1-\nu^2)} + \frac{\varepsilon^2 U^4 (1 + 4\nu - 8\nu^2)}{64(1-\nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (13.56)$$

Как и следовало ожидать, во втором приближении у нас наряду с вынужденными колебаниями с частотами  $\nu$  и  $3\nu$ , равными частотам внешней силы, появились компоненты с кратными частотами  $3\nu$ , а также с комбинационными частотами  $\nu \pm 2\omega$ ,  $2\nu \pm \omega$ , что характерно только для нелинейных систем.

Далее, на основании ранее сказанного при выполнении условия (13.53) гетеропериодический режим колебаний является неустойчивым и поэтому физически невозможным. В случае выполнения условия (13.54) гетеропериодический режим будет единственным устойчивым стационарным режимом. С течением времени в системе устанавливаются гетеропериодические колебания вида

$$x = \frac{\varepsilon U \nu (4 - U^2)}{4(1-\nu^2)} \cos \theta + \frac{\varepsilon U^3 \nu}{4(1-9\nu^2)} \cos 3\theta. \quad (13.57)$$

### § 14. «Резонансные» случаи

Перейдем к рассмотрению резонансных случаев. Предположим, что

$$\omega \approx \frac{p}{q} \nu,$$

где  $p$  и  $q$  — некоторые взаимно простые числа.

Тогда в зависимости от характера стоящей перед нами задачи может возникнуть два различных подхода к ее решению: 1) при исследовании резонанса достаточно ограничиться рассмотрением только самой резонансной области; 2) кроме изучения резонансной области, необходимо также изучить подходы к этой области из нерезонансной зоны.

Начнем рассмотрение с первого случая, как более простого. Ввиду того, что в этом случае предполагается рассматривать значения  $\frac{p}{q} \nu$ , достаточно близкие к  $\omega$ , естественно положить

$$\omega^2 = \left( \frac{p}{q} \nu \right)^2 + \varepsilon \Delta, \quad (14.1)$$

где  $\varepsilon \Delta$  представляет собой расстройку между квадратом собственной и внешней частоты.

Тогда исходное уравнение (13.1) запишется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{p}{q} \nu \right)^2 x = \varepsilon \left\{ f \left( \nu t, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\}. \quad (14.2)$$

Таким образом, расстройку  $\varepsilon \Delta$  ввиду малости относим к возмущающей силе, после чего решение уравнения (14.2), как и в нерезонансном случае, можем искать в виде

$$x = a \cos \phi + \varepsilon u_1(a, \nu t, \phi) + \varepsilon^2 u_2(a, \nu t, \phi) + \dots, \quad (14.3)$$

где  $u_1(a, \nu t, \phi)$ ,  $u_2(a, \nu t, \phi), \dots$  — периодические функции с периодом  $2\pi$  по обеим угловым переменным  $\nu t$  и  $\phi$ , а  $a$  и  $\phi$  — некоторые функции времени, которые мы должны определить из соответствующих дифференциальных уравнений.

Для составления этих уравнений удобно ввести в рассмотрение, кроме угловой переменной  $\phi$ , представляющей собой полную фазу колебания, еще разность фаз

$$\vartheta = \phi - \frac{p}{q} \nu t.$$

Как уже ранее указывалось, из простых физических соображений следует, что в резонансных случаях разность фаз между собственным колебанием и внешним воздействием может оказывать существенное влияние на изменение амплитуды и частоты колебания. Поэтому в отличие от ранее рассматривавшихся случаев мы будем представлять  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\phi}{dt}$  как функции не только  $a$ , но также и  $\vartheta$ , иначе говоря, мы будем определять  $a$  и  $\phi$  как решения дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (14.4)$$

где  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $A_2(a, \vartheta)$ , ...,  $B_1(a, \vartheta)$ ,  $B_2(a, \vartheta)$ , ... — периодические функции угловой переменной  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ .

Поскольку в правые части выражений для  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\psi}{dt}$  входит не полная фаза  $\psi$ , а фазовый угол  $\vartheta$ , целесообразно исключить  $\psi$  из выражения (14.3) и уравнений (14.4).

Тогда, полагая  $\psi = \frac{p}{q} \nu t + \vartheta$ , получим вместо (14.3) следующее выражение:

$$x = a \cos \left( \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) + \varepsilon u_1 \left( a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right) + \dots, \quad (14.5)$$

в котором функции времени  $a$  и  $\vartheta$  должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots \end{cases} \quad (14.6)$$

Таким образом, нам нужно определить функции

$$\begin{aligned} A_1(a, \vartheta), \quad A_2(a, \vartheta), \quad \dots, \quad B_1(a, \vartheta), \quad B_2(a, \vartheta), \quad \dots, \quad u_1 \left( a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right), \\ u_2 \left( a, \vartheta, \frac{\nu}{q} t \right), \quad \dots \end{aligned}$$

так, чтобы выражение (14.5), в котором вместо  $a$  и  $\vartheta$  подставлены решения уравнений (14.6), удовлетворяло основному рассматриваемому уравнению (14.2).

Дифференцируя (14.5), находим:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ & + \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} + \dots \right\} \frac{d\vartheta}{dt} + \\ & + \left\{ -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \dots \right\}, \quad (14.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} = & \left\{ \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial a} + \dots \right\} \frac{d^2 a}{dt^2} + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a^2} + \dots \right\} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \\ & + 2 \left\{ -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \vartheta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial \vartheta} + \dots \right\} \frac{da}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} + \\ & + 2 \left\{ -\frac{p}{q} \nu \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ & + \left\{ -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} + \dots \right\} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \\ & + \left\{ -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \vartheta^2} + \dots \right\} \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \\ & + 2 \left\{ -a \frac{p}{q} \nu \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \vartheta \partial t} + \dots \right\} \frac{d\vartheta}{dt} + \\ & + \left\{ -a \left( \frac{p}{q} \nu \right)^2 \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \dots \right\}. \quad (14.8) \end{aligned}$$

Далее, на основании (14.6) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\ \left( \frac{da}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 A_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \quad \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \varepsilon^2 B_1^2 + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots, \\ \frac{da}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon^2 A_1 B_1 + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Подставляя (14.5) и (14.8) в левую часть уравнения (14.2), учитывая при этом (14.6), (14.9) и располагая результаты по степеням параметра  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{p}{q} v \right)^2 x &= \varepsilon \left\{ -2 \frac{p}{q} v \sin \psi A_1 - 2a \frac{p}{q} v \cos \psi B_1 + \right. \\ &\quad + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( \frac{p}{q} v \right)^2 u_1 \Big\} + \varepsilon^2 \left\{ \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - a B_1^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2a \frac{p}{q} v B_2 \right] \cos \psi + \left[ -2A_1 B_1 - 2 \frac{p}{q} v A_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 - a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 \right] \sin \psi + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} B_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( \frac{p}{q} v \right)^2 u_2 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (14.10) \right. \end{aligned}$$

Раскладывая правую часть уравнения (14.2) по степеням малого параметра, находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ f \left( vt, x, \frac{dx}{dt} \right) - \Delta x \right\} &= \varepsilon \left\{ -\Delta a \cos \psi + \right. \\ &\quad + f \left( vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) \Big\} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ f'_x \left( vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) u_1 + \right. \\ &\quad + f'_{x'} \left( vt, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} v \sin \psi \right) \left( A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \Delta u_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (14.11) \end{aligned}$$

Приравнивая в правых частях (14.10) и (14.11) коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим для определения искомых функций следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( \frac{p}{q} v \right)^2 u_1 &= f_0(a, vt, \psi) + 2 \frac{p}{q} v A_1 \sin \psi + \\ &\quad + 2a \frac{p}{q} v B_1 \cos \psi - \Delta a \cos \psi, \quad (14.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( \frac{p}{q} v \right)^2 u_2 &= f_1(a, vt, \psi) + \left[ 2 \frac{p}{q} v A_2 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2A_1 B_1 \right] \sin \psi + \left[ 2a \frac{p}{q} v B_2 - \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + a B_1^2 \right] \cos \psi, \quad (14.13) \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$f_0(a, \nu t, \psi) = f\left(\nu t, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi\right), \quad (14.14)$$

$$\begin{aligned} f_1(a, \nu t, \psi) = & f'_x\left(\nu t, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi\right) u_1 + \\ & + f''_{xx}\left(\nu t, a \cos \psi, -a \frac{p}{q} \nu \sin \psi\right) \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \\ & - \Delta u_1 - 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} - 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Как и в ранее изложенных случаях,  $f_k(a, \nu t, \psi)$  являются периодическими функциями с периодом  $2\pi$  по обеим угловым переменным  $\nu t, \psi$  [ $A_i(a, \theta)$  и  $B_i(a, \theta)$  — периодические функции по отношению к  $\theta$  с периодом  $2\pi$ ].

Найдем из уравнения (14.12)  $u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$ ,  $A_1(a, \theta)$  и  $B_1(a, \theta)$ , соблюдая условие отсутствия в выражении для  $u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$  членов, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

Представляя функции  $u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$  и  $f_0\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)$  в виде конечных сумм Фурье, имеем:

$$u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right) = \sum_n \sum_m u_{nm}^{(1)}(a) e^{i\{n\nu t + m\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)\}}, \quad (14.16)$$

$$f_0\left(a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right) = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{n\nu t + m\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)\}}, \quad (14.17)$$

где

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\{n\theta + m\psi\}} d\theta d\psi,$$

причем следует заметить, что фактически в случае, если правая часть уравнения (13.1)  $\varepsilon f(\nu t, x, \frac{dx}{dt})$  является полиномом по отношению к  $x, \frac{dx}{dt}$  и содержит конечное число гармоник по переменной  $\nu t$ , то разложения (14.17) могут быть найдены при помощи элементарных тригонометрических преобразований.

Подставим правые части выражений (14.16) и (14.17) в уравнение (14.12). В результате получим:

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_m \left\{ \left(\frac{p}{q} \nu\right)^2 - \left(n\nu + m \frac{p}{q} \nu\right)^2 \right\} e^{i\{n\nu t + m\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)\}} u_{nm}^{(1)}(a) = \\ = \sum_n \sum_m f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{n\nu t + m\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right)\}} + 2 \frac{p}{q} \nu B_1 \sin\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right) + \\ + 2a \frac{p}{q} \nu B_1 \cos\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right) - \Delta a \cos\left(\frac{p}{q} \nu t + \vartheta\right), \end{aligned} \quad (14.18)$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, находим:

$$u_{nm}^{(1)}(a) = \frac{f_{nm}^{(0)}(a)}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2} \quad (14.19)$$

для всех  $n, m$ , удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2 \neq 0$$

или эквивалентному условию

$$nq + (m \pm 1)p \neq 0;$$

получаем так же соотношение для определения  $A_1(a, \vartheta)$  и  $B_1(a, \vartheta)$ :

$$2\frac{p}{q}\nu A_1 \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + \left(2a\frac{p}{q}\nu B_1 - \Delta a\right) \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) + \sum_{\substack{n \\ [nq+(m\pm 1)p=0]}} \sum_{m} e^{i\{n\nu t + m\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\}} f_{nm}^{(0)}(a) = 0. \quad (14.20)$$

Подставляя значение  $u_{nm}^{(1)}(a)$  (14.19) в правую часть формулы (14.16), находим:

$$u_1\left(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) = \sum_{\substack{n \\ [nq+(m\pm 1)p=0]}} \sum_{m} \frac{f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{n\nu t + m\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)\}}}{\left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \left(n\nu + m\frac{p}{q}\nu\right)^2}. \quad (14.21)$$

Обратимся теперь к уравнению (14.20). Суммирование в нем, как указано, идет по всем целым  $n, m$  (положительным, отрицательным и нулевым), для которых

$$nq + (m \pm 1)p = 0. \quad (14.22)$$

Поэтому в данной сумме имеются комплексные экспоненты вида

$$\begin{aligned} e^{i\{(n+m\frac{p}{q})\nu t + m\vartheta\}} &= e^{i\{(nq+mp)\frac{\nu}{q}t + m\vartheta\}} = \\ &= e^{i\{\mp\frac{p}{q}\nu t + m\vartheta\}} = e^{i\{-\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\} + (m \pm 1)\vartheta} = \\ &= \left\{ \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) \mp i \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right) \right\} e^{i(m \pm 1)\vartheta}. \end{aligned}$$

Заметим, кроме того, что в силу (14.22)  $m \pm 1$  делится на  $q$ , так что мы можем записать этот сомножитель в виде  $q\sigma$  ( $-\infty < \sigma < \infty$ ).

Приравнивая коэффициенты при  $\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)$  и  $\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \vartheta\right)$  в (14.20), имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a, \vartheta) &= \frac{q}{4\pi^2\nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \sin\psi d\theta d\psi, \\ B_1(a, \vartheta) &= \frac{\Delta}{2} \frac{q}{p\nu} - \\ &- \frac{q}{4\pi^2 a p \nu} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-iq\sigma\vartheta'} \cos\psi d\theta d\psi \\ &\left( \vartheta' = \psi - \frac{p}{q}\theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

В формулах (14.23) суммирование производится для всех значений  $\sigma$ , как положительных, так и отрицательных, для которых интегралы, стоящие под знаком суммы, отличны от нуля. Эти интегралы будут отличны от нуля для тех значений  $\sigma$ , для которых суммарный показатель соответствующей экспоненты (полученной после разложения в ряд Фурье подынтегрального выражения) равен нулю. Таким образом, если правая часть уравнения (13.1) является полиномом относительно  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\cos vt$  и  $\sin vt$ , то  $\sigma$  будет принимать конечное число целых значений.

Итак, в первом приближении для резонансного случая решение уравнения (13.1) будет:

$$x = a \cos \left( \frac{p}{q} vt + \vartheta \right),$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \phi d\theta d\phi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\epsilon \Delta q}{2p\nu} - \frac{\epsilon q}{4\pi^2 a \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \phi d\theta d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

Так как в резонансном случае предполагается, что расстройка  $\epsilon \Delta$  является величиной первого порядка малости, можем с той же степенью точности систему уравнений (14.24) представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \phi d\theta d\phi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu - \frac{\epsilon q}{4\pi^2 a \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \phi d\theta d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

Зная выражения для  $u_1(a, vt, \frac{p}{q} vt + \vartheta)$ ,  $A_1(a, \vartheta)$  и  $B_1(a, \vartheta)$ , можно в соответствии с (14.15) найти явное выражение для  $f_1(a, vt, \frac{p}{q} vt + \vartheta)$ , после чего из уравнения (14.13) получим выражения для  $A_2(a, \vartheta)$  и  $B_2(a, \vartheta)$ , необходимые для построения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} A_2(a, \vartheta) &= -\frac{q}{2\nu p} \left[ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2 \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \phi d\theta d\phi, \\ B_2(a, \vartheta) &= \frac{q}{2a\nu p} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - aB_1^2 \right] - \\ &\quad - \frac{q}{4\pi^2 a \nu p} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \phi d\theta d\phi. \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

Перейдем теперь к рассмотрению самого общего случая.

Пусть требуется исследовать поведение системы как вблизи резонанса, так и для подходов к резонансной области из нерезонансной зоны. Для этого необходимо построить такие приближенные решения, которые

давали бы возможность изучить поведение системы для достаточно большого интервала частот и из которых как частные случаи можно было бы получить выведенные выше формулы как для резонансного случая, так и для нерезонансного.

Здесь мы уже не можем считать, что расстройка мала, и поэтому приближенное решение должны искать непосредственно для уравнения (13.1); кроме того, в выражения для мгновенной амплитуды и частоты надо ввести зависимость от угла сдвига фаз.

Таким образом, решение, как и выше, ищем в виде ряда

$$x = a \cos \left( \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) + \varepsilon u_1(a, \nu t, \phi) + \varepsilon^2 u_2(a, \nu t, \phi) + \dots, \quad (14.27)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

причем разность  $\omega - \frac{p}{q} \nu$  не обязательно мала.

Здесь, как и всегда,  $u_1(a, \nu t, \phi)$ ,  $u_2(a, \nu t, \phi)$  обладают периодом  $2\pi$  по отношению к обеим угловым переменным  $\phi$  и  $\nu t$ , а  $A_i(a, \vartheta)$  и  $B_i(a, \vartheta)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) периодические, с периодом  $2\pi$ , по отношению к угловой переменной  $\vartheta$ .

Для определения всех этих функций мы могли бы применить неоднократно использованный прием непосредственного дифференцирования разложений (14.27) и подстановки результата в основное уравнение с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях. Вместо этого воспользуемся здесь рассуждениями, аналогичными тем, которые были применены при изложении метода гармонического баланса.

Для получения первого приближения рассмотрим главную гармонику

$$x = a \cos \phi, \quad \phi = \frac{p}{q} \nu t + \vartheta. \quad (14.29)$$

На основании принципа гармонического баланса при подстановке (14.29) в уравнение (13.1) с учетом системы уравнений (14.28) главные гармоники в левой и правой частях уравнения (13.1) должны быть равны.

Для получения второго приближения мы, естественно, при определении главной гармоники в левой части уравнения (13.1) должны учесть члены при  $\varepsilon^2$ , а в выражении для  $f(\nu t, x, \frac{dx}{dt})$  должны учесть члены с  $\varepsilon u_1(a, \nu t, \phi)$ .

Таким образом, во втором приближении для главной гармоники левой части уравнения (13.1) сразу получаем:

$$\begin{aligned} \text{главная гармоника } \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \right\} &= \left\{ \varepsilon \left[ \left( \omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2\omega a B_1 \right] + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \left( \omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_2 + \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - B_1^2 a \right] \left. \right\} \cos \phi - \\ &- \left\{ \varepsilon \left[ \left( \omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] + \varepsilon^2 \left[ \left( \omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega A_2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] \right\} \sin \phi. \quad (14.30) \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть уравнения (13.4)  $x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, vt, \psi)$ , получаем с точностью до величин второго порядка малости для главной гармоники следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & \text{главная гармоника } \left\{ \varepsilon f \left( vt, x, \frac{dx}{dt} \right) \right\} = \\
 & = \varepsilon \sum_{\substack{n, m \\ [nq + (m \pm 1)p = 0]}} f_{nm}^{(0)}(a) e^{i\{nvt + m\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right)\}} + \\
 & + \varepsilon^2 \sum_{\substack{n, m \\ [nq + (m \pm 1)p = 0]}} f_{nm}^{(1)}(a) e^{i\{nvt + m\left(\frac{p}{q}vt + \vartheta\right)\}} = \\
 & = \varepsilon \left\{ \cos \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi + \right. \\
 & + \sin \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \Big\} + \\
 & + \varepsilon^2 \left\{ \cos \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi + \right. \\
 & + \sin \psi \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \Big\}, \quad (14.31)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$f_0(a, \theta, \psi) = f(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \quad (14.32)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(a, \theta, \psi) = & f'_x(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1 + f'_{x'}(\theta, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \times \\
 & \times \left[ A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) \right] - \frac{\partial u_1}{\partial a} \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - \\
 & - \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta^2} B_1 \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} A_1 - \\
 & - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \vartheta} \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) A_1. \quad (14.33)
 \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в выражениях (14.30) и (14.31), получаем в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\
 & \left( \omega - \frac{p}{q} v \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 = - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi;
 \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

во втором приближении:

$$\begin{aligned} \left( \omega - \frac{p}{q} \nu \right) \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - 2a\omega B_2 &= - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 - aB_1^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \cos \phi d\theta' d\phi, \\ \left( \omega - \frac{p}{q} \nu \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + 2\omega A_2 &= - \left\{ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2A_1 B_1 \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma} e^{iq\sigma\theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(a, \theta, \phi) e^{-iq\sigma\theta'} \sin \phi d\theta' d\phi. \end{aligned} \quad (14.35)$$

Выражение для  $\varepsilon u_1(a, \nu t, \psi)$  определяем как вынужденные колебания, возбуждаемые в  $x$  действием высших гармоник внешней силы  $\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  в режиме гармонических колебаний ( $x = a \cos \psi$ ,  $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \psi$ ):

$$\varepsilon u_1(a, \nu t, \psi) = \sum_{\substack{n, m \\ [nq + (m \pm 1)p \neq 0]}} \frac{e^{i(n\nu t + m\psi)}}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} f_{nm}^{(0)}(a), \quad (14.36)$$

где

$$f_{nm}^{(0)}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi. \quad (14.37)$$

Заметим, что в предыдущих случаях, «резонансном» и «нерезонанском», мы могли бы первое и второе приближения построить также, применяя изложенный метод гармонического баланса.

Скажем еще несколько слов по поводу определения  $A_i(a, \theta)$ ,  $B_i(a, \theta)$  ( $i = 1, 2$ ) из систем уравнений (14.34) и (14.35).

Правые части этих уравнений периодические по  $\theta$  и представляют собой суммы типа  $\sum k_n(a) e^{in\theta}$ , поэтому и решение для  $A_i(a, \theta)$ ,  $B_i(a, \theta)$  ( $i = 1, 2$ ) мы должны искать в виде аналогичных сумм. В результате все выкладки при определении  $A_i(a, \theta)$ ,  $B_i(a, \theta)$  ( $i = 1, 2$ ) сводятся к чисто тригонометрическим операциям.

Нетрудно заметить, что из выведенных нами формул для исследования как резонансной области, так и подходов к ней можно получить все ранее найденные формулы. Так, полагая в уравнениях (14.34)  $\omega - \frac{p}{q} \nu = \varepsilon \Delta$ , находим с точностью до величины первого порядка малости выражения для  $A_1(a, \theta)$  и  $B_1(a, \theta)$  (14.23), полученные в случае резонанса.

Резюмируя, приведем схему построения решения уравнения (13.1) в первом и во втором приближениях для самого общего случая. В качестве первого приближения принимаем:

$$x = a \cos \left( \frac{p}{q} \nu t + \theta \right), \quad (14.38)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} + \varepsilon B_1(a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (14.39)$$

в которых  $A_1(a, \vartheta)$  и  $B_1(a, \vartheta)$  — частные, периодические решения системы (14.34). Во втором приближении полагаем:

$$x = a \cos \left( \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) + \varepsilon u_1 \left( a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right), \quad (14.40)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (14.41)$$

в которых  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $B_1(a, \vartheta)$ ,  $A_2(a, \vartheta)$ ,  $B_2(a, \vartheta)$  должны быть найдены из систем (14.34) и (14.35), а  $u_1 \left( a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right)$  по формуле (14.36).

Заметим еще раз, что уравнения второго приближения (14.41) с учетом выражений для  $A_2(a, \vartheta)$  и  $B_2(a, \vartheta)$  (14.35) кажутся достаточно сложными только потому, что они записаны в самом общем виде. Для конкретных примеров даже во втором приближении мы получаем сравнительно простые уравнения, определяющие амплитуду и фазу колебания (см., например, уравнения (13.56) и (15.38)).

Остановимся на рассмотрении первого приближения.

В отличие от нерезонансного случая здесь в уравнениях первого приближения (14.39) переменные не разделены, и мы имеем систему двух взаимно связанных уравнений для определения двух неизвестных  $a$  и  $\vartheta$ .

Заметим сначала, что для достаточно больших  $p$  и  $q$  ввиду сделанного ранее предположения о полиномиальном характере функций  $f_n \left( x, \frac{dx}{dt} \right)$  первое приближение в резонансном случае не отличается от нерезонансного случая. Действительно, для достаточно больших  $p$  и  $q$  в суммах, стоящих в правых частях уравнений (14.39), останутся только члены, соответствующие  $\sigma = 0$ , которые совпадают с выражениями (13.35), полученными в нерезонансном случае.

Таким образом, эффект резонанса сказывается, вообще говоря, при небольших значениях чисел  $p$  и  $q$ .

Возвратимся к рассмотрению уравнений первого приближения (14.39).

Так как правые части этих уравнений зависят от  $a$  и от  $\vartheta$ , то проинтегрировать их в замкнутом виде в общем случае не удается. Качественный характер решений может быть, однако, исследован и в общем случае с помощью теории Пуанкаре, потому что здесь мы имеем дело с двумя уравнениями первого порядка.

Согласно основным результатам этой теории (см. гл. III) можно утверждать, что всякое решение\*) уравнений (14.39) приближается

\*) Следует иметь в виду, что для всякого решения величина  $a$  должна оставаться конечной. С физической точки зрения это ограничение всегда выполняется, так как амплитуда колебаний не может неограниченно возрастать.

с возрастанием времени или к постоянным решениям

$$a = a_i, \vartheta = \vartheta_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

определенным из уравнений

$$A_1(a, \vartheta) = 0, \omega - \frac{p}{q} + \varepsilon B_1(a, \vartheta) = 0, \quad (14.42)$$

или к периодическим.

Таким образом, получаем два основных типа стационарных колебаний: колебания, соответствующие постоянному решению или, как говорят, «точке равновесия» уравнений (14.39), и колебания, соответствующие периодическому решению.

В первом случае колебания в первом приближении совершаются с частотой, точно равной  $\frac{p}{q}\nu$  и находящейся, следовательно, в простом рациональном соотношении с частотой возбуждения. Поэтому такой режим колебаний называется синхронным.

В высших приближениях (см., например, формулу (14.21)) в выражении для  $u_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta)$ , кроме основной частоты  $\frac{p\nu}{q}$ , присутствуют, вообще говоря, и другие обертоны разделенной частоты  $\frac{\nu}{q}$ .

В случае, если в системе существует постоянное решение типа  $a = 0$ , соответствующее отсутствию собственных колебаний, выражение для  $u_1(a, \nu t, \frac{p}{q}\nu t + \vartheta)$  (14.21) будет то же самое, что и в нерезонансном случае (13.34), и представляет собой гетеропериодический режим колебаний.

Исследуем вопрос устойчивости стационарного синхронного режима. Для определения устойчивости постоянных решений  $a_0$  и  $\vartheta_0$ , определяемых уравнениями (14.42), необходимо образовать соответствующие им уравнения в вариациях.

На основании (14.39) уравнения в вариациях можем записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= \varepsilon A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) \delta a + \varepsilon A'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) \delta \vartheta, \\ \frac{d\delta \vartheta}{dt} &= \varepsilon B'_{1a}(a_0, \vartheta_0) \delta a + \varepsilon B'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) \delta \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (14.43)$$

Характеристическое уравнение для системы (14.43) будет:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon A'_{1a} - \lambda & \varepsilon A'_{1\vartheta} \\ \varepsilon B'_{1a} & \varepsilon B'_{1\vartheta} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (14.44)$$

или

$$\lambda^2 - (\varepsilon A'_{1a} + \varepsilon B'_{1\vartheta}) \lambda + \varepsilon^2 (A'_{1a} B'_{1\vartheta} - B'_{1a} A'_{1\vartheta}) = 0. \quad (14.45)$$

Из (14.45) получаем следующие условия устойчивости для рассматриваемых синхронных стационарных колебаний:

$$A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) + B'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) < 0, \quad (14.46)$$

$$A'_{1a}(a_0, \vartheta_0) B'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) - A'_{1\vartheta}(a_0, \vartheta_0) B'_{1a}(a_0, \vartheta_0) > 0. \quad (14.47)$$

Во втором случае, соответствующем периодическому решению уравнений (14.39), в первом приближении колебание будет совершаться

с двумя основными частотами — с частотой  $\omega$  или  $\frac{p}{q}\nu + \Delta\omega$  и частотой биений  $\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  — период данного периодического решения). Эти колебания называются асинхронными.

В качестве примера, иллюстрирующего характер синхронного и асинхронного режимов, рассмотрим ламповый генератор, находящийся под воздействием внешней периодической силы с частотой  $\nu$ .

В случае, если генератор составлен по схеме, приведенной на рис. 78, дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс, будет:

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \omega^2 e = -\omega^2 \left[ \frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) \frac{di_a}{dt} \right], \quad (14.48)$$

где  $L$  — симоиндукция,  $M$  — коэффициент взаимной индукции,  $R$  — сопротивление,  $D$  — проницаемость лампы,  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — собственная частота линейного контура,  $C$  — емкость,  $i_a = f(E_0 + F \cos \nu t + e)$  — характеристика лампы ( $i_a$  — анодный ток),  $E = E_0 + F \cos \nu t + e$  — полное управляемое напряжение,  $E_0$  — постоянная слагающаяся полного управляемого напряжения,  $F \cos \nu t$  — слагающаяся нелинейного управляемого напряжения, вызываемая внешним возбуждением,  $e$  — слагающая управляемого напряжения, происходящая от колебаний в контуре.

Рассмотрим случай, когда  $f(E_0 + u)$ , где  $u = e + F \cos \nu t$ , является кубическим полиномом:

$$f(E_0 + u) = f(E_0) + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3, \quad (14.49)$$

в котором  $S_2 > 0$ .

Предположим, что члены, стоящие в правой части уравнения (14.48), малы; тогда колебания будут близки к гармоническим, и мы можем построить приближенное решение уравнения (14.48), воспользовавшись приведенными выше формулами.

Будем рассматривать «резонансный» случай, когда  $p = 1$ ,  $q = 2$ , т. е.  $\omega \approx \frac{\nu}{2}$ .

Уравнение (14.48) перепишем в форме

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} e = -\omega^2 \left[ \frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) \frac{di_a}{dt} \right] - \left( \omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) e. \quad (14.50)$$

Решение в первом приближении ищем в виде

$$e = a \cos \phi, \quad \phi = \frac{\nu}{2} t + \vartheta,$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \vartheta),$$

для составления которой воспользуемся методом гармонического баланса.

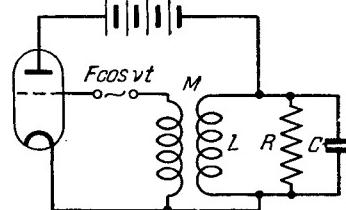


Рис. 78.

Подсчитаем главные гармоники в левой и правой частях уравнения (14.50); имеем (см., например, (14.10)):

$$\begin{aligned} \text{главная гармоника } & \left\{ \frac{d^2e}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4} e \right\} = \varepsilon A_1(a, \vartheta) \nu \sin \phi - \varepsilon B_1(a, \vartheta) a \nu \cos \phi; \\ \text{главная гармоника } & \left\{ -\omega^2 \left[ \frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) f'_1(E_0 + F \cos \nu t + e) \right] - \right. \\ & \left. - \left( \omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) e \right\} = - \left\{ \delta_0 \nu \left[ -\frac{3S_2}{4S_{cr}} a^3 + \frac{S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2}{S_{cr}} a \right] + \right. \\ & \left. + \frac{a \nu S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \cos 2\vartheta \right\} \sin \phi - \left\{ a \left( \omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \right) - \frac{a \nu S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \sin 2\vartheta \right\} \cos \phi, \end{aligned}$$

где обозначено:  $\delta_0 = \frac{1}{2RC}$ ,  $S_{cr} = \frac{L}{R(M - DL)}$ .

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках и учитывая, что  $\omega + \frac{\nu}{2} \approx \nu$ , получим для определения  $a$  и  $\vartheta$  следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \delta_0 \left[ -\frac{3S_2}{4S_{cr}} a^3 + \frac{S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2}{S_{cr}} a \right] + \frac{a S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \cos 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{S_1 F \delta_0}{2S_{cr}} \sin 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (14.51)$$

Ввиду того, что во второе уравнение системы (14.51) входит только одна неизвестная функция  $\vartheta$ , оно может быть проинтегрировано с помощью квадратуры.

Однако, мы остановимся на другом вопросе.

Исследуем, при каких соотношениях между частотами  $\omega$  и  $\nu$ , а также коэффициентами полинома (14.49) в генераторе будут существовать стационарные колебания.

Допустим сначала, что

$$\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right| < \left| \frac{\delta_0 S_1 F}{2S_{cr}} \right|. \quad (14.52)$$

Тогда, интегрируя второе уравнение системы (14.51), получим:

$$\vartheta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \vartheta_0, \quad (14.53)$$

где

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \arcsin 2 \frac{\omega - \frac{\nu}{2}}{\delta_0 S_1 F} S_{cr}. \quad (14.54)$$

Из первого уравнения системы (14.51) при выполнении (14.53) находим:

$$\underset{t \rightarrow \infty}{a(t)} \rightarrow a_0, \quad (14.55)$$

где  $a_0$  определяется из уравнения

$$\left( S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 \right) a_0 - \frac{3}{4} S_2 a_0^3 = 0. \quad (14.56)$$

Если

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 < 0, \quad (14.57)$$

то, очевидно,

$$a_0 = 0.$$

Таким образом, при выполнении условий (14.52) и (14.57) в генераторе устанавливается гетеропериодический режим — единственный возможный в данном случае стационарный режим.

Пусть теперь

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 > 0; \quad (14.58)$$

тогда решение  $a_0 = 0$  неустойчиво и система будет самовозбуждающейся.

Из уравнения (14.56) находим значение  $a_0$ :

$$a_0 = \sqrt{\frac{4}{3S_0} \left[ S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\vartheta_0 \right]}. \quad (14.59)$$

Таким образом, при выполнении условий (14.52) и (14.58) в рассматриваемой колебательной системе устанавливается синхронный режим и в первом приближении

$$e = a_0 \cos \left( \frac{\nu}{2} t + \vartheta_0 \right), \quad (14.60)$$

где  $a_0$  и  $\vartheta_0$  определяются выражениями (14.59) и (14.54), т. е. в генераторе устанавливаются стационарные колебания с постоянными амплитудой и фазой и с частотой, равной половине частоты возбуждения.

Согласно условию (14.52) расстройка резонанса  $|\omega - \frac{\nu}{2}|$  не должна при этом превосходить некоторой величины. Иначе говоря, синхронный режим возможен при достаточно малых значениях расстройки.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\omega$ , оставаясь достаточно близкой к  $\frac{\nu}{2}$ , так что условия применимости уравнений (14.51) выполняются, удовлетворяет неравенству

$$\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right| > \left| \frac{S_0 S_1 F}{2 S_{cr}} \right|, \quad (14.61)$$

Тогда, проинтегрировав второе уравнение системы (14.62), можно представить  $\vartheta$  в виде

$$\vartheta = \Delta\omega t + \Phi(\Delta\omega t + \theta), \quad (14.62)$$

где  $\theta$  — произвольная постоянная,  $\Phi(\theta)$  — периодическая функция  $\theta$  с периодом  $2\pi$ ,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\omega - \frac{\nu}{2} - \left| \frac{S_1 F \delta_0}{2 S_{cr}} \right| \sin 2\vartheta}. \quad (14.63)$$

Подставляя значение  $\vartheta$  (14.62) в первое уравнение системы (14.51), получаем для определения стационарных значений амплитуды уравнение первого порядка с периодическим коэффициентом.

Это уравнение допускает решение  $a = 0$ , соответствующее гетеропериодическому режиму. Вопрос об устойчивости решения  $a = 0$  зависит от

знака выражения

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \overline{\cos 2\vartheta}, \quad (14.64)$$

где  $\overline{\cos 2\vartheta}$  обозначает усредненное значение  $\cos 2\vartheta$  по периоду  $T$ :

$$\overline{\cos 2\vartheta} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\vartheta dt. \quad (14.65)$$

Благодаря (14.63) имеем  $\overline{\cos 2\vartheta} = 0$ , и поэтому выражение (14.64) принимает вид

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2. \quad (14.66)$$

Если выражение (14.66) отрицательно, то самовозбуждение отсутствует и гетеропериодический режим  $a = 0$  устойчив; если же выражение (14.66) положительно, то в системе имеют место самовозбуждение и, следовательно, неустойчивость гетеропериодического режима.

Итак, при выполнении условия (14.61) и условия

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 > 0 \quad (14.67)$$

можно показать, что

$$a(t) \rightarrow A(\Delta\omega t + \theta), \quad (14.68)$$

где  $A(\Delta\omega t + \theta)$  — соответствующее периодическое решение с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$  первого уравнения системы (14.51) после подстановки в него значения  $\vartheta$  из (14.62).

В частности, при достаточно больших значениях расстройки  $\left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|$  получаем приближенно:

$$A(\theta) \approx a_0, \quad (14.69)$$

где

$$a_0^2 = \frac{4}{3S_0} \left( S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 \right),$$

т. е. значение стационарной амплитуды в нерезонансном случае.

Итак, при выполнении условий (14.61) и (14.67) в генераторе устанавливается стационарный двухчастотный режим — асинхронные колебания. В первом приближении для стационарных колебаний получаем выражение

$$e = A(\Delta\omega t + \theta) \cos \left[ \left( \frac{\nu}{2} + \Delta\omega \right) t + \theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta) \right], \quad (14.70)$$

в котором  $\frac{\nu}{2} + \Delta\omega$  — основная частота, а амплитуда  $A(\Delta\omega t + \theta)$  и фаза  $\theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta)$  колеблются с частотой биений  $\Delta\omega$ .

Анализируя выражение (14.70), нетрудно заметить, что в этом случае при удалении от резонанса колебания приближаются к нерезонансным колебаниям вида

$$e = a \cos(\omega t + \theta).$$

Этот факт, очевидно, имеет место и в самом общем случае. Исследуя общие уравнения первого приближения (14.39), можно показать, что при увеличении расстройки  $|\omega - \frac{\nu}{2}|$  «резонансное» первое приближение непрерывно переходит в «нерезонансное».

### § 15. Воздействие синусоидальной силы на нелинейный вибратор

В качестве частного случая колебательной системы, описываемой уравнением (13.1), рассмотрим нелинейный вибратор, находящийся под воздействием гармонической силы. Колебания такой системы, как указывалось выше, описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \epsilon E \sin \nu t^*. \quad (15.1)$$

Анализируя во введении это уравнение, мы пришли к заключению, что в первом приближении может быть обнаружен только основной резонанс.

Итак, пользуясь ранее выведенными формулами, построим приближенные решения уравнения (15.1) в случае основного резонанса ( $p = 1, q = 1$ ).

Согласно (14.39) и (14.40) в первом приближении имеем:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta), \quad (15.2)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\epsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu - \frac{\epsilon}{2\pi\omega am} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\epsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Во втором приближении полагаем

$$x = a \cos \psi + \epsilon u_1(a, \psi), \quad (15.4)$$

где  $u_1(a, \psi)$  определяется как вынужденное колебание, возбуждаемое в системе высшими гармониками внешней силы в режиме синусоидальных колебаний:

$$\begin{aligned} u_1(a, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq 1} \frac{e^{im\psi}}{\omega^2(1-m^2)} f_m^{(0)}(a), \\ f_m^{(0)}(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) e^{-im\psi} d\psi, \end{aligned}$$

\*) В данном случае предполагается, что амплитуда внешней гармонической силы мала. Если, исходя из физических соображений, такого вывода сделать нельзя, то имеем уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + E \sin \nu t,$$

которое заменой  $x = y + \frac{E}{k - \nu^2 m} \sin \nu t$  приводится к уравнению типа (13.1).

а и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений второго приближения, для построения которой воспользуемся формулами (14.34) и (14.35).

Сначала находим согласно (14.31) и (14.32) главную гармонику функции  $\varepsilon^2 f_1(a, \psi)$ :

главная гармоника  $\{\varepsilon^2 f_1(a, \psi)\} =$

$$= \frac{\varepsilon^2 \cos \psi}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon^2 \sin \psi}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \sin \psi d\psi,$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(a, \psi) &= f'_x(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) u_1(a, \psi) + \\ &+ f'_{x'}(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \left[ A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial \psi}(\omega - \nu) \right]. \end{aligned}$$

Далее, согласно (14.35) для определения  $A_2(a, \vartheta)$  и  $B_2(a, \vartheta)$  составляем систему

$$\begin{aligned} m \left[ (\omega - \nu) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_2 \right] &= \\ &= -m \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 - aB_1^2 \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \cos \psi d\psi, \\ m \left[ (\omega - \nu) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega A_2 \right] &= \\ &= -m \left[ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + 2A_1 B_1 \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(a, \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

После этого, зная  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $A_2(a, \vartheta)$ ,  $B_1(a, \vartheta)$ ,  $B_2(a, \vartheta)$ , не представляет труда составить уравнения, определяющие  $a$  и  $\vartheta$ , во втором приближении.

Остановимся подробнее на исследовании первого приближения.

Как и в случае нелинейной системы, находящейся под воздействием возмущения, не зависящего явно от времени, положим для сокращения (см. (7.4))

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ k_e(a) &= k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

и заметим, что введенные параметры  $\lambda_e(a)$ ,  $k_e(a)$  являются соответственно эквивалентным коэффициентом затухания и полным эквивалентным коэффициентом упругости для рассматриваемой колебательной системы в «свободном» состоянии при отсутствии внешнего возбуждения, т. е. для системы, описываемой уравнением вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (15.6)$$

После этого уравнения (15.3) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где  $\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$ ,  $\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}$  являются соответственно эквивалентным декрементом затухания и эквивалентной частотой нелинейных собственных колебаний, описываемых уравнением (15.6).

Рассмотрим стационарные режимы колебаний. Для получения в первом приближении стационарных значений амплитуды  $a$  и фазы  $\vartheta$  необходимо приравнять нулю правые части уравнений (15.7), после чего получим соотношения:

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(a)a - \frac{\varepsilon E}{m(\omega + \nu)} \cos \vartheta &= 0, \\ \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{ma(\omega + \nu)} \sin \vartheta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

или с точностью до величин второго порядка малости следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} 2m\nu a\delta_e(a) &= -\varepsilon E \cos \vartheta, \\ ma[\omega_e^2(a) - \nu^2] &= -\varepsilon E \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

откуда, исключая фазу  $\vartheta$ , находим зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$m^2 a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \delta_e^2(a)] = \varepsilon^2 E^2. \quad (15.10)$$

Полученные нами уравнения (15.9) и (15.10) совпадают с уравнениями, которые в классической линейной теории используются для определения амплитуды и фазы вынужденного колебания

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) \quad (15.11)$$

в системе с массой  $m$ , коэффициентом упругости  $k_e(a)$  и коэффициентом затухания  $\lambda_e(a)$  (и соответственно с частотой  $\omega_e(a) = \sqrt{\frac{k_e(a)}{m}}$  и декрементом  $\delta_e(a) = \frac{\lambda_e(a)}{2m}$ ), находящейся под воздействием внешней синусоидальной силы  $\varepsilon E \sin \nu t$ .

Поэтому можем сформулировать следующее правило. Пусть дана некоторая нелинейная система, находящаяся под воздействием внешней синусоидальной силы с частотой, близкой к собственной частоте системы. Требуется найти значения амплитуды и фазы стационарного синхронного колебания (15.2).

Для этого, линеаризируя данную колебательную систему в свободном состоянии (т. е. не принимая во внимание внешней силы  $\varepsilon E \sin \nu t$ ), определяем функции амплитуды — эквивалентный декремент и эквивалентную частоту собственных колебаний.

Подставив найденные значения в классические соотношения линейной теории колебаний (15.9) и (15.10), получим уравнение для определения искомых величин амплитуды и фазы.

Настоящее правило сформулировано для частного случая колебательной системы, описываемой дифференциальным уравнением (15.1), однако оно может быть распространено и на более общие случаи колебательных систем.

Выведем условия устойчивости для рассматриваемых синхронных стационарных колебаний.

Для резонансного случая уравнения первого приближения (15.7) с точностью до величин второго порядка малости могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} 2\nu \frac{da}{dt} &= -2\nu a \delta_e(a) - \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta, \\ 2\nu a \frac{d\vartheta}{dt} &= [\omega_e^2(a) - \nu^2] a + \frac{\varepsilon E}{m} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (15.12)$$

а уравнения стационарных синхронных режимов — в виде

$$\left. \begin{aligned} R(a, \vartheta) &= 0, \\ \Phi(a, \vartheta) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

где через  $R(a, \vartheta)$  и  $\Phi(a, \vartheta)$  обозначены соответственно правые части уравнений (15.12).

Пусть  $a$  и  $\vartheta$  — какие-либо решения уравнений (15.13). Для исследования вопроса об их устойчивости воспользуемся выведенными ранее условиями (см. (14.46), (14.47)). Применительно к нашему случаю они будут иметь следующий вид:

$$aR'_a(a, \vartheta) + \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) < 0, \quad (15.14)$$

$$aR'_a(a, \vartheta)\Phi'_\vartheta(a, \vartheta) - R'_\vartheta(a, \vartheta)\Phi'_a(a, \vartheta) > 0. \quad (15.15)$$

Раскроем смысл этих неравенств.

Из (15.14) имеем:

$$aR'_a(a, \vartheta) + \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) = -2\nu a \delta_e(a) - 2\nu a^2 \frac{d\delta_e(a)}{da} + \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta,$$

откуда, принимая во внимание первое уравнение системы (15.12), находим:

$$aR'_a(a, \vartheta) + \Phi'_\vartheta(a, \vartheta) = -2\nu a \frac{d(\delta_e(a))}{da} - 2\nu a \delta_e(a) = -2\nu \frac{d(a^2 \delta_e(a))}{da}, \quad (15.16)$$

Имея в виду введенные обозначения (15.15), можем написать:

$$2\nu a^2 \delta_e(a) = \frac{a^2 \lambda_e(a)}{m} \nu = \frac{2\nu}{m \omega^2} W(a), \quad (15.17)$$

где

$$W(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos(\omega t + \vartheta), -a \omega \sin(\omega t + \vartheta)) a \omega \sin(\omega t + \vartheta) d(\omega t + \vartheta) \quad (15.18)$$

представляет среднюю мощность, рассеянную силой  $f(x, \frac{dx}{dt})$  при колебаниях

$$x = a \cos(\omega t + \vartheta).$$

При обычных законах трения  $W(a)$  возрастает вместе с амплитудой, так что

$$W'(a) > 0.$$

Таким образом, если ограничиться рассмотрением систем с обычным законом трения, то условие (15.14) согласно выражениям (15.16) и (15.17) будет всегда выполняться.

Рассмотрим теперь условие (15.15). Для этого исследуем зависимость  $a$  и  $\vartheta$  — решений уравнений (15.13) — от частоты  $\nu$ .

Дифференцируя (15.13) по  $\nu$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} R'_a \frac{da}{d\nu} + R'_\vartheta \frac{d\vartheta}{d\nu} &= -R'_\nu, \\ \Phi'_a \frac{da}{d\nu} + \Phi'_\vartheta \frac{d\vartheta}{d\nu} &= -\Phi'_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

откуда находим:

$$(R'_a \Phi'_\vartheta - \Phi'_a R'_\vartheta) \frac{da}{d\nu} = \Phi'_\nu R'_\vartheta - R'_\nu \Phi'_\vartheta. \quad (15.20)$$

С другой стороны, из (15.13) имеем

$$\left. \begin{aligned} R'_\vartheta &= \frac{\varepsilon E}{m} \sin \vartheta, \quad R'_\nu = -2\delta_e(a) a, \\ \Phi'_\vartheta &= \frac{\varepsilon E}{m} \cos \vartheta, \quad \Phi'_\nu = -2\nu a, \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

в связи с чем правую часть (15.20) можем записать следующим образом:

$$\Phi'_\nu R'_\vartheta - R'_\nu \Phi'_\vartheta = 2a \left( -\nu \frac{E}{m} \sin \vartheta + \delta_e(a) \frac{E}{m} \cos \vartheta \right),$$

или, учитывая уравнения (15.9), в виде

$$\Phi'_\nu R'_\vartheta - R'_\nu \Phi'_\vartheta = 2\nu a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2) - 2\delta_e^2(a)]. \quad (15.22)$$

Таким образом, из (15.20) и (15.22) вытекает, что

$$(R'_a \Phi'_\vartheta - \Phi'_a R'_\vartheta) \frac{da}{d\nu} = 2\nu a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2) - 2\delta_e^2(a)].$$

После этого очевидно, что условие устойчивости (15.15) может быть представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\nu} &> 0, \text{ если } \omega_e^2(a) > \nu^2 + 2\delta_e^2(a), \\ \frac{da}{d\nu} &< 0, \text{ если } \omega_e^2(a) < \nu^2 + 2\delta_e^2(a), \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

или с точностью до величин первого порядка малости ( $\delta_e^2(a)$  — величина второго порядка малости):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\nu} &> 0, \text{ если } \omega_e(a) > \nu, \\ \frac{da}{d\nu} &< 0, \text{ если } \omega_e(a) < \nu, \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

Полученные условия устойчивости (15.24) очень удобны при графическом представлении зависимости амплитуды от частоты.

В самом деле, воспользовавшись уравнением (15.10), построим кривую (рис. 79)

$$a = F(\nu) \quad (15.25)$$

(резонансную кривую), а также построим кривую

$$a = F_0(\nu), \quad (15.26)$$

определенным уравнением точного резонанса

$$\omega_e(a) = \nu$$

(так называемую скелетную кривую).

Тогда на ветви кривой (15.25), лежащей левее кривой (15.26), устойчивыми (т. е. соответствующими устойчивым амплитудам) будут те участки, на которых  $a$  возрастает вместе с  $\nu$ ; на ветви, лежащей правее кривой (15.26), наоборот, устойчивыми будут те участки, на которых  $a$  убывает с возрастанием  $\nu$ .

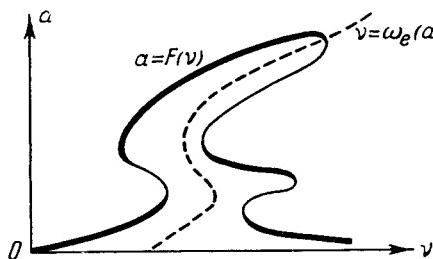


Рис. 79.

Графическое построение делает наглядной зависимость устойчивой стационарной амплитуды от частоты возбуждающей силы и, в частности, позволяет определить точки срыва и скачка, обусловливающие гистерезисные явления, характерные только для нелинейных систем.

В качестве конкретного примера рассмотрим нелинейный вибратор с жесткой характеристикой нелинейной восстанавливающей силы ( $F = cx + dx^3$ ), находящийся под воздействием внешней синусоидальной силы. Пусть колебания вибратора описываются уравнением вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = E \sin \nu t, \quad (15.27)$$

где  $x$  — координата, определяющая положение системы,  $t$  — время,  $m$  — масса системы,  $b$  — коэффициент сопротивления,  $F = cx + dx^3$  — нелинейная восстанавливающая упругая сила,  $E$  и  $\nu$  — соответственно амплитуда и частота внешней синусоидальной силы.

Введем для упрощения безразмерные  $x_1$  и  $t_1$  по формулам:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{d}} x, \quad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t.$$

Тогда уравнение (15.27) можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x + x^3 = E_1 \sin \nu t, \quad (15.28)$$

где  $\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}}$ ,  $E_1 = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{a}{c}}$  и для упрощения опущены индексы при  $x$  и  $t$ .

Допустим теперь, что в исследуемой системе трение, а также амплитуда внешней силы являются малыми и, кроме того, характеристика нелинейной восстанавливающей силы достаточно близка к линейной.

Тогда, сопоставляя уравнение (15.28) с (15.1), имеем:

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\delta \frac{dx}{dt} - x^3, \quad \varepsilon E = E_1, \quad (15.29)$$

после чего, воспользовавшись формулами (15.2), (15.5) и (15.7), получим в первом приближении решение уравнения (15.18) для случая основного резонанса в виде

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta), \quad (15.30)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} - \frac{E_1}{1+\nu} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \nu + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a(1+\nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

Перейдем сразу к рассмотрению стационарного режима синхронных колебаний. При таком режиме в первом приближении согласно (15.30) величина  $x$  будет изменяться по косинусоиде с частотой внешнего возбуждения и с постоянными амплитудой и фазой, определяемыми с точностью до величин второго порядка малости системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\delta a - E_1 \cos \vartheta &= 0, \\ a \left[ \left( 1 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 - \nu^2 \right] + E_1 \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

Согласно (15.5) для уравнения (15.28) имеем:

$$\delta_e(a) = \delta, \quad \omega_e(a) = 1 + \frac{3a^2}{8}. \quad (15.33)$$

Исключая из соотношений (15.32) фазу  $\vartheta$  (или непосредственно подставляя значения  $\delta_e(a)$  и  $\omega_e(a)$  (15.33) в (15.10)), находим следующую зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$a^2 \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{3a^2}{8} \right)^2 - \nu^2 \right]^2 + \delta^2 \right\} = E_1^2 \quad (15.34)$$

из которой находим:

$$\nu = \sqrt{\omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{E_1^2}{a^2} - \delta^2}}. \quad (15.35)$$

При помощи этой зависимости строим резонансную кривую (рис. 80), а также скелетную кривую, определяемую уравнением

$$1 + \frac{3a^2}{8} = \nu \quad (15.36)$$

(рис. 80, пунктирная линия).

При помощи полученной диаграммы согласно приведенному на стр. 190 правилу легко установить зоны устойчивых и неустойчивых амплитуд.

Так, устойчивым амплитудам будут соответствовать участки резонансной кривой  $MAB$  и  $DCN$ . Точки  $B$  и  $D$  будут являться точками срыва и скачка амплитуды.

Диаграмма, приведенная на рис. 80, позволяет полностью проанализировать характер колебаний в исследуемой системе при изменении частоты внешней силы. Так, при увеличении частоты внешней силы, начиная от малых значений, амплитуда вынужденных колебаний нарастает сначала по кривой  $MAB$ . В точке  $B$  происходит срыв амплитуды — значение амплитуды скачком переходит в точку  $C$  и при дальнейшем увеличении частоты изменяется по кривой  $CN$ . Если теперь начать уменьшать частоту, то амплитуда вынужденных колебаний

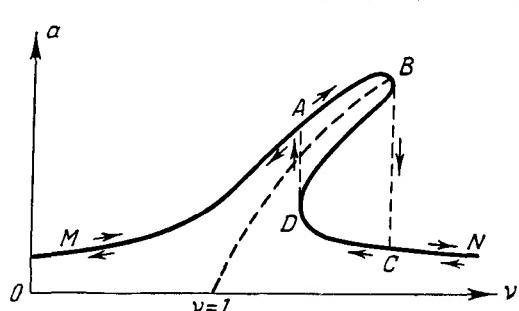


Рис. 80.

будет изменяться по кривой  $NCD$ . Дойдя до точки  $D$ , значение амплитуды перейдет в точку  $A$  и дальше будет изменяться по верхней ветви резонансной кривой  $AM$ .

Заметим, что, говоря об изменении частоты внешней силы, мы подразумеваем очень медленное ее изменение, такое, что практически в каждый момент систему можно рассматривать как стационарную. Ниже этот вопрос будет более подробно рассмотрен в связи с явлением прохождения через резонанс.

Приведем теперь решение уравнения (15.28), соответствующее второму приближению. Согласно формулам (15.4) и (14.42) во втором приближении имеем:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) + \frac{a^3}{32} \cos 3(\nu t + \vartheta), \quad (15.37)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений второго приближения:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} + \frac{3a^3\delta}{16} - E_1 \left[ \frac{1}{1+\nu} - \frac{3a^2(7-\nu)}{8(3-\nu)(1+\nu)^2} \right] \cos \vartheta - \frac{E_1 \delta}{2(1+\nu)^2} \sin \vartheta, \quad (15.38) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \nu + \frac{3a^2}{8} - \frac{\delta^2}{8} - \frac{15a^4}{256} + \\ &\quad + \frac{E_1}{a} \left[ \frac{1}{1+\nu} - \frac{3a^2(5-3\nu)}{8(3-\nu)(1+\nu)^2} \right] \sin \vartheta - \frac{E_1 \delta}{2a(1+\nu)^2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Как следует из выражения (15.37), во втором приближении появляются высшие гармоники, и колебание уже не будет являться чисто синусоидальным.

Приравнивая правые части уравнений (15.38) нулю и исключая угол  $\vartheta$ , получаем зависимость между амплитудой колебания  $a$  и частотой внешней силы  $\nu$  во втором приближении. При помощи этого соотношения строим резонансную кривую во втором приближении (рис. 81, пунктирная линия).

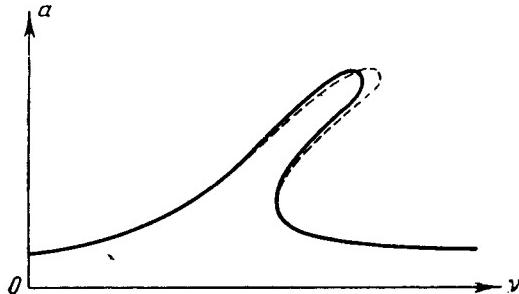


Рис. 81.

ны только при рассмотрении высших приближений.

Для того чтобы проиллюстрировать это, построим первое и второе приближение для колебательной системы, описываемой уравнением (15.28) в случае  $p = 1, q = 3$ .

Согласно формулам (14.38), (14.39) в первом приближении имеем:

$$x = a \cos\left(\frac{1}{3}\nu t + \vartheta\right), \quad (15.39)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \frac{1}{3}\nu + \frac{3a^2}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

Правые части уравнений (15.40) зависят только от  $a$  и характеризуют систему в нерезонансном случае. Интегрируя эти уравнения, получаем для  $x$  выражение

$$x = a_0 e^{-\frac{\delta}{2}t} \cos \left[ t - \frac{3a_0^2}{8\delta} e^{-\delta t} + \vartheta_0 \right], \quad (15.41)$$

$a_0$  и  $\vartheta_0$  — произвольные постоянные. Таким образом, в первом приближении колебания системы описываются затухающей по экспоненциальному закону косинусоидой и частота колебаний зависит от амплитуды.

Никакого эффекта резонанса в первом приближении не будет; а ввиду того, что амплитуда внешнего синусоидального возбуждения порядка  $\varepsilon$ , то в первом приближении не имеют места даже вынужденные колебания с частотой возбуждения (вынужденные колебания будут заметны при рассмотрении улучшенного первого приближения).

Подсчитаем теперь второе приближение. Воспользовавшись формулами (14.40) и (14.41), находим для  $x$  следующее выражение:

$$x = a \cos \left( \frac{1}{3}\nu t + \vartheta \right) + \frac{a^3}{32} \cos 3 \left( \frac{1}{3}\nu t + \vartheta \right) - \frac{E_1}{8} \sin \nu t, \quad (15.42)$$

в котором  $a$  и  $\vartheta$  — решения уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} + \frac{3}{16} \delta a^3 - \frac{3a^2 E_1}{32 \left( 1 + \frac{\nu}{3} \right)} \cos 3\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \frac{\nu}{3} + \frac{3a^2}{8} - \frac{\delta^2}{8} - \frac{15a^4}{256} + \frac{3a E_1}{32 \left( 1 + \frac{\nu}{3} \right)} \sin 3\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.43)$$

Выражения (15.42) и (15.43) свидетельствуют о влиянии внешнего возбуждения на колебательную систему, которое мы обнаруживаем при рассмотрении второго приближения. Так, согласно (15.42) в выражении для  $x$ , кроме обертонов собственной частоты, появились также и гармоники с частотой внешней силы. При помощи уравнений (15.43) мы можем обнаружить резонансные зоны и построить резонансные кривые.

Приравнивая правые части уравнений (15.43) нулю, получаем с точностью до величин третьего порядка малости следующие зависимости, определяющие стационарные значения амплитуды  $a$  и фазы колебаний  $\vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} -\delta_e(a) a - \frac{3a^2 E_1}{32} \cos 3\vartheta &= 0, \\ \omega_e^2(a) - \frac{\nu^2}{9} + \frac{3a E_1}{32} \sin 3\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.44)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \delta_e(a) &= \delta - \frac{3}{8} \delta a^2, \\ \omega_e^2(a) &= 1 + \frac{3a^2}{4} - \frac{\delta^2}{4} - \frac{15a^4}{128}. \end{aligned} \right\} \quad (15.45)$$

Исключая из зависимостей (15.44) фазу  $\vartheta$ , находим соотношение между амплитудой и частотой возмущающей силы:

$$\left[ \omega_e^2(a) - \frac{\nu^2}{9} \right]^2 + \delta_e^2(a) = \frac{9a^2 E_1^2}{1026}, \quad (15.46)$$

или

$$\nu = 3 \sqrt{\omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{9a^2 E_1^2}{1026} - \delta_e^2(a)}}, \quad (15.47)$$

при помощи которого можно построить резонансную кривую.

Приведем теперь пример, для которого уже в первом приближении можно обнаружить дробный резонанс.

Рассмотрим линейный колебательный контур с регенерацией при помощи электронной лампы (рис. 82).

Как известно, на этом примере Мандельштамом и Папалекси [29] было изучено явление резонанса  $n$ -го рода, причем решение получаемого уравнения находилось для установившегося режима методом Пуанкаре, а для исследования процесса установления колебаний применялся метод Ван-дер-Поля.

Для указанной колебательной системы дифференциальное уравнение, описывающее движение, имеет вид

$$CL \frac{d^2 i}{dt^2} + CR \frac{di}{dt} + i = i_a + C \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (15.48)$$

где

$$i_a = f_0(V_s) \quad (15.49)$$

есть уравнение характеристики лампы, зависящее от управляющего напряжения.

После ряда преобразований уравнение (15.48) может быть сведено к виду \*)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + E \sin nt, \quad (15.50)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= F'(x) \frac{dx}{dt} + \frac{\xi}{1+\xi} x, \\ F(x) &= \frac{1}{1+\xi} f_1(x) - 2\theta x, \end{aligned} \right\} \quad (15.51)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= x, \quad -\frac{nM_r E_0}{L_0 V_0} = E, \quad t = \frac{\tau}{\tau_0}, \\ 2\theta &= \frac{nR}{\omega L}, \quad \xi = \frac{\omega^2 - n^2 \omega_0^2}{n^2 \omega_0^2}, \\ I_a &= \frac{i_a}{I_0} = \frac{f_0(V_s)}{I_0} = f_1\left(\frac{dI}{dt}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15.52)$$

\*) См. [29], т. II, стр. 21.

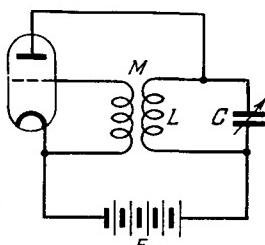


Рис. 82.

Остановимся на исследовании резонансного случая. Для того чтобы можно было применить для построения приближенного решения формулы § 14, необходимо в уравнении (15.50) сделать замену переменных:

$$x = y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \quad (15.53)$$

после чего получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon f \left[ y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right]. \quad (15.54)$$

Допустим, что регенерация в контуре осуществляется при помощи электронной лампы с характеристикой:

$$i_a = a + bx + cx^2 - dx^3, \quad (15.55)$$

где  $V_0 = 12\text{e}$ ,  $I_0 = 142\text{ma}$ ,  $a, b, c, d$  — постоянные. Тогда для правой части (15.50) получаем выражение

$$f \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = (k + 2x + \gamma x^2) \frac{dx}{dt} + \frac{\xi}{0,016} x, \quad (15.56)$$

в котором приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{0,016}{1+\xi}, \quad k = k_0 + 2\bar{\vartheta} \frac{\xi}{\beta}, \quad \beta = 0,016, \\ \bar{\vartheta} &= 0,013, \quad \gamma = -2, \quad k_0 = -0,05 \\ (a &= 0,95, \quad b = 3,35, \quad c = 2,25, \quad d = 1,5). \end{aligned} \right\} \quad (15.57)$$

Подставляя значение  $f \left( x, \frac{dx}{dt} \right)$  (15.56) в уравнение (15.54), находим для правой части рассматриваемого уравнения следующее выражение:

$$\begin{aligned} f \left[ y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt, \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right] &= \\ &= \left[ k + 2y + \frac{2E}{1-n^2} \sin nt + \gamma \left( y^2 + \frac{2yE}{1-n^2} \sin nt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E^2}{(1-n^2)^2} \sin^2 nt \right) \right] \left( \frac{dy}{dt} + \frac{En}{1-n^2} \cos nt \right) + \\ &\quad + \frac{\xi}{0,016} \left( y + \frac{E}{1-n^2} \sin nt \right). \end{aligned} \quad (15.58)$$

Построим теперь решение уравнения (15.54) в первом приближении для случая  $n = 2$ , т. е. для случая, когда в колебательной системе может возникнуть резонанс деления на два.

Воспользовавшись формулами (14.39) и (14.25) и полагая  $p = 1$ ,  $q = 2$ , после ряда выкладок получаем:

$$y = a \cos(t + \vartheta), \quad (15.59)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} a \left( k + \frac{\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2 a}{36} + \frac{aE}{6} \sin 2\vartheta \right\}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon \left\{ -\frac{\xi}{23} + \frac{E}{6} \cos 2\vartheta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15.60)$$

Система уравнений первого приближения (15.60) дает возможность исследовать как стационарный режим, так и процесс установления колебаний при резонансе второго рода.

Для исследования процесса установления колебаний необходимо проинтегрировать систему (15.60) и найти  $a$  и  $\vartheta$  как функции времени. В данном случае интегрирование системы (15.60) может быть произведено до конца. Для этого сделаем в уравнениях (15.60) замену переменных согласно формулам:

$$u = a \cos \vartheta, \quad v = a \sin \vartheta. \quad (15.61)$$

После ряда выкладок вместо уравнений (15.60) получаем для новых переменных  $u$  и  $v$  следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} u \left[ k + \frac{\gamma}{4} (u^2 + v^2) \right] + \frac{\gamma E^2}{36} u + \frac{E}{6} v + \frac{\xi}{2\beta} v \right\}, \\ \frac{dv}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} v \left[ k + \frac{\gamma}{4} (u^2 + v^2) \right] + \frac{\gamma E^2}{36} v + \frac{E}{6} u - \frac{\xi}{2\beta} u \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (15.62)$$

Система (15.62), как это показано в работе [29], может быть приведена к уравнению типа Бернулли.

Действительно, умножая уравнения (15.62) соответственно на  $v$  и  $u$  и вычитая из первого второе, находим:

$$v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt} = v^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \left[ -(u^2 - v^2) \frac{E}{3} - (u^2 + v^2) \frac{\xi}{\beta} \right]. \quad (15.63)$$

Умножая первое уравнение системы (15.62) на  $u$  и складывая полученный результат со вторым уравнением, умноженным на  $v$ , получим:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left[ k + \frac{\gamma}{4} \left( a + \frac{2E^2}{9} \right) \right] + \frac{2\varepsilon uv}{3} E. \quad (15.64)$$

Обозначая

$$\frac{u}{v} = \chi, \quad (15.65)$$

можем вместо (15.63) и (15.64) написать следующую систему:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \left[ \left( -\frac{E}{3} - \frac{\xi}{\beta} \right) \chi^2 - \left( -\frac{E^2}{3} + \frac{\xi}{\beta} \right) \right], \quad (15.66)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a \left[ k + \frac{\gamma}{4} \left( a + \frac{2E^2}{9} \right) \right] - \frac{2\varepsilon Ea}{3} \frac{\chi}{1 + \chi^2}. \quad (15.67)$$

Уравнение (15.66) легко интегрируется.

После того как мы определим из него  $\chi(t)$ , (15.67) может быть приведено к виду

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon\gamma}{4} a^2 + \varphi(t) a, \quad (15.68)$$

где  $\varphi(t)$  — известная функция времени.

Подстановкой  $W = \frac{1}{a}$  (15.68) приводится к линейному уравнению

$$\frac{dW}{dt} = -\varphi(t) W - \frac{\varepsilon\gamma}{4}. \quad (15.69)$$

В результате получаем следующую известную формулу, выражающую закон изменения амплитуды колебания со временем:

$$a = \frac{e^{\int_0^t \varphi(t) dt}}{C_1 - \frac{\varepsilon\gamma}{4} \int_0^t e^{0 \int_0^t \varphi(t) dt} dt}, \quad (15.70)$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования.

Перейдем теперь к определению установившихся колебаний, совершающихся с постоянной амплитудой и фазой.

Приравнивая правые части системы (15.60) нулю, получаем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18} + \frac{E}{3} \sin 2\vartheta &= 0, \\ -\frac{\xi}{\beta} + \frac{E}{3} \cos 2\vartheta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.71)$$

определяющие стационарные значения амплитуды и фазы колебаний. Исключая из (15.71) фазу  $\vartheta$ , находим известную зависимость

$$a^2 = -\frac{2E^2}{9} - \frac{4}{\gamma} \left[ k \pm \sqrt{\frac{E^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}} \right], \quad (15.72)$$

при помощи которой можно построить резонансные кривые, характеризующие зависимость амплитуды  $a$  от расстройки  $\xi$  (рис. 83). Стационарные значения фазы  $\vartheta$  находим с помощью формулы

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = -\frac{k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18}}{\frac{\xi}{\beta}}, \quad (15.73)$$

где  $a$  определяется из (15.72).

Для определения устойчивых значений стационарной амплитуды поступаем согласно общим правилам.

Находим сначала величины:

$$\left. \begin{aligned} A'_a(a, \vartheta) &= \frac{1}{2} \left( k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta, \\ A'_\vartheta(a, \vartheta) &= \frac{Ea}{3} \cos 2\vartheta, \\ B'_a(a, \vartheta) &= 0, \\ B'_\vartheta(a, \vartheta) &= -\frac{E}{3} \sin 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (15.74)$$

После этого составляем уравнения в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left( k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta \right\} \delta a + \\ &\quad + \frac{Ea}{3} \cos 2\vartheta \delta \vartheta, \\ \frac{d\delta \vartheta}{dt} &= -\frac{E}{3} \sin 2\vartheta \delta \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15.75)$$

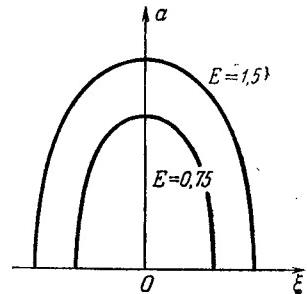


Рис. 83.

из которых находим условия устойчивости стационарных значений  $a$  и  $\vartheta$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta - \frac{E}{3} \sin 2\vartheta < 0, \\ & \left\{ \frac{1}{2} \left( k + \frac{3\gamma a^2}{4} \right) + \frac{\gamma E^2}{36} + \frac{E}{6} \sin 2\vartheta \right\} \left( -\frac{E}{3} \sin 2\vartheta \right) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.76)$$

Эти условия после ряда преобразований можно представить в виде следующих известных неравенств:

$$k + \frac{1}{2} \gamma a^2 + \frac{\gamma E^2}{18} < 0, \quad (15.77)$$

$$\gamma \left[ k + \frac{\gamma a^2}{4} + \frac{\gamma E^2}{18} \right] > 0, \quad (15.78)$$

анализ которых совместно с зависимостью (15.72) дает возможность определить величину и границы областей устойчивости периодического решения с периодом  $2\pi^*$ ).

### § 16. Воздействие синусоидальной силы на нелинейную систему с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков

В качестве второго частного случая рассмотрим колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из нескольких прямолинейных отрезков, находящейся под воздействием синусоидальной возмущающей силы.

Колебательные системы, для которых нелинейная восстанавливающая сила имеет характеристику, состоящую из отрезков прямых (рис. 84, 85, 86, 87), широко распространены в технике.

Исследование вынужденных колебаний в нелинейных системах такого типа посвящен ряд работ, например работы А. И. Лурье и А. И. Чекмарева \*\*), где приводится решение методом Галеркина; для некоторых начальных условий специального вида Ден-Гартогом \*\*\* ) строится решение, которое можно рассматривать как точное, однако это решение чрезвычайно громоздко.

Для решения подобных задач нам представляется все же более удобным применение вышеизложенного асимптотического метода, который в первом приближении дает те же результаты, что и метод Галеркина, но одновременно с этим позволяет легко определить второе приближение, найти поправки к частоте во втором приближении, а также исследовать не только стационарный режим, но и проследить движение системы в период установления колебаний.

Итак, предположим, что колебания системы описываются уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = \varepsilon f_1 \left( \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E \sin \nu t, \quad (16.1)$$

\* ) См. [29], т. II, стр. 36.

\*\*) А. И. Лурье и А. И. Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков, журнал Прикладная математика и механика, т. I, в. 3 (1938).

\*\*\*) J. P. Den Hartog and R. M. Heiles, Forced Vibration in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs, Journ. of Appl. Mech., vol. 3, № 4, p. 126–130 (1936).

где функция  $F(x)$ , выражающая зависимость нелинейной восстанавливающей силы от смещения, является нечетной функцией  $x$  (случай симметричной характеристики)

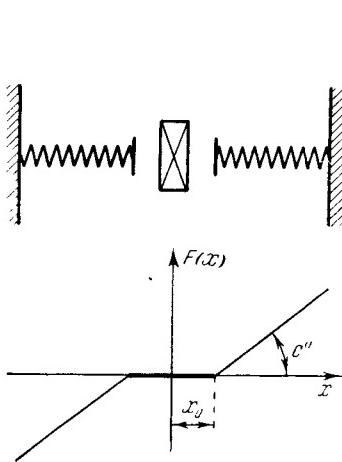


Рис. 84.

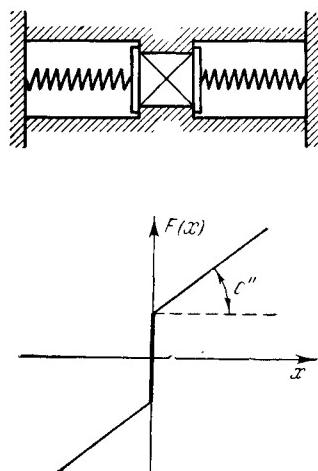


Рис. 85.

и имеет вид, например, приведенный на рис. 84—87.

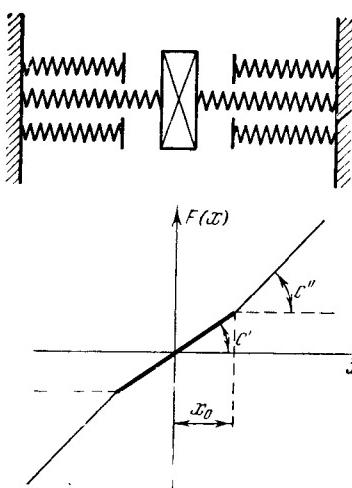


Рис. 86.

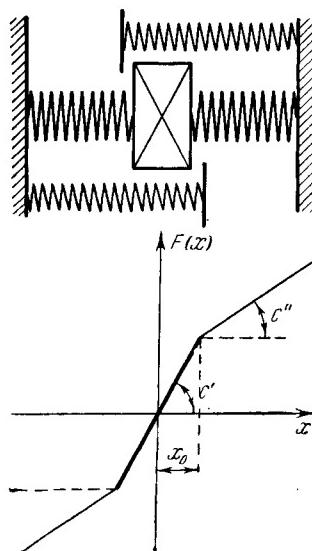


Рис. 87.

Заметим, что если характеристика нелинейной восстанавливающей силы несимметрична, то при помощи изложенного метода также не представляется затруднений построить решения.

Предположим, что  $F(x)$  можно записать в виде

$$F(x) = c''x + \varepsilon f(x); \quad (16.2)$$

тогда вместо уравнения (16.1) можем рассматривать следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c''x = -\varepsilon f(x) + \varepsilon f_1\left(\frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon E \sin \nu t, \quad (16.3)$$

и, следовательно, согласно (15.2) и (15.3) в первом приближении имеем решение

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta), \quad (16.4)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi - \frac{\varepsilon E}{\omega + \nu} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi) \cos \phi d\phi + \frac{\varepsilon E}{a(\omega + \nu)} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Принимая во внимание, что

$$\omega^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi) \cos \phi d\phi = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \phi) \cos \phi d\phi, \quad (16.6)$$

преобразуем (16.5) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e(a) a - \frac{\varepsilon E}{\omega + \nu} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(a) - \nu + \frac{\varepsilon E}{a(\omega + \nu)} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

где, как и выше,

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_1(-a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi, \quad (16.8)$$

$$\omega_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \phi) \cos \phi d\phi. \quad (16.9)$$

Приравнивая в уравнениях (16.7) правые части нулю и исключая  $\vartheta$ , находим зависимость между  $a$  и  $\nu$  для стационарного режима:

$$a^2 [(\omega_e^2(a) - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \delta_e^2(a)] = \varepsilon^2 E^2. \quad (16.10)$$

Если пренебречь трением, то вместо (16.10) получаем следующую простую формулу:

$$a [\omega_e^2(a) - \nu^2] = \pm \varepsilon E, \quad (16.11)$$

при этом в правой части следует брать «+» для  $a > 0$  и «-» для  $a < 0$ .

Приведем еще соответствующие формулы для второго приближения. Пренебрегая в уравнении (16.1) трением, имеем:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) + \varepsilon u_1(a, \nu t, \nu t + \vartheta), \quad (16.12)$$

где

$$u_1(a, \nu t, \nu t + \vartheta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(\nu t + \vartheta)}{\omega^2(1-n^2)} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi) \cos \phi d\phi, \quad (16.13)$$

а амплитуда стационарных колебаний определяется соотношением

$$a [\omega_e^2(a) - v^2] + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) [f_{n+1}^{(1)}(a) + f_{n-1}^{(1)}(a)]}{\omega^2(1-n^2)} = \pm \varepsilon E, \quad (16.14)$$

в котором введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi, \\ f_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

Перейдем к построению резонансных кривых. Для характеристики нелинейной восстанавливающей силы, приведенной на рис. 84—87, имеем:

$$F(x) = \begin{cases} c'x & \text{для } -x_0 \leq x \leq x_0, \\ c''x + (c' - c'')x_0 & \text{для } x_0 \leq x \leq \infty, \\ c''x - (c' - c'')x_0 & \text{для } -\infty \leq x \leq -x_0. \end{cases} \quad (16.16)$$

Положим  $a > 0$ ,  $a > x_0$  и обозначим через  $\psi_0$  наименьший корень уравнения

$$x_0 = a \cos \psi_0. \quad (16.17)$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\varepsilon f(a \cos \psi) = \begin{cases} (c' - c'')a \cos \psi & \text{для } \psi_0 \leq \psi \leq \pi - \psi_0, \\ (c' - c'')a \cos \psi_0 & \text{для } 0 \leq \psi \leq \psi_0, \\ -(c' - c'')a \cos \psi_0 & \text{для } \pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi. \end{cases} \quad (16.18)$$

Разбивая промежуток интегрирования на три части, после элементарных вычислений находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ &= c''a + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ a \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.19)$$

При  $a < 0$ ,  $|a| > x_0$  после аналогичных вычислений имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi &= \\ &= c''a - \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ a \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Таким образом, при отсутствии трения согласно (16.14) получаем следующую зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы:

$$a(c'' - v^2) + \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} + a \arcsin \frac{x_0}{a} \right] = \pm \varepsilon E$$

или, обозначая  $\left| \frac{a}{x_0} \right| = A$ ,

$$A(c'' - v^2) + \frac{2}{\pi}(c' - c'') \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + A \arcsin \frac{1}{A} \right] = \pm \frac{\varepsilon E}{x_0}. \quad (16.21)$$

При помощи зависимости (16.21) строим семейство резонансных кривых (рис. 88–91) (зависимость между  $\frac{a}{x_0}$  и  $\frac{v}{\omega_2}$ , где  $\omega_2 = \sqrt{c''}$ ) для различных значений  $\frac{E}{c''x_0}$ .

Резонансные кривые, приведенные на этих рисунках, практически совпадают (в пределах точности построения графиков) с резонансными кривыми, построенными по точным формулам Ден-Гартога и Гельса.

Для построения резонансных кривых во втором приближении необходимо определить выражение для суммы, входящей в формулу (16.14). Заметим, что подсчет этой суммы не вызывает затруднений, так как ее слагаемые с увеличением  $n$  быстро уменьшаются, и поэтому достаточно подсчитать только несколько первых слагаемых.

Принимая во внимание (16.18), находим для интегралов (16.15) следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi &= \frac{(c' - c'')}{\pi} a \left\{ \frac{2x_0}{na} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \left( n \arcsin \frac{x_0}{a} \right) + \right. \\ &+ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \sin \left[ (n-1) \arcsin \frac{x_0}{a} \right] + \left. \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \sin \left[ (n+1) \arcsin \frac{x_0}{a} \right] \right\} \quad (16.22) \\ &\quad (n = 3, 5, 7, 9, \dots), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f'_a(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi &= -\frac{2}{\pi} (c' - c'') \sin n \arccos \frac{x_0}{a} \\ &\quad (n = 2, 4, 6, 8, \dots). \end{aligned}$$

Подставляя (16.22) в выражение (16.14) и ограничиваясь в сумме пятью слагаемыми, получаем:

$$\begin{aligned} a(v^2 - c'') - \frac{2}{\pi} (c' - c'') \left[ x_0 \sqrt{1 - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2} + a \arcsin \frac{x_0}{a} \right] + \\ + \frac{1}{2\omega^2} \left\{ \frac{f_3(a) [f_2^{(1)}(a) + f_4^{(1)}(a)]}{8} + \frac{f_5(a) [f_4^{(1)}(a) + f_6^{(1)}(a)]}{24} \right\} \pm \varepsilon E = 0, \quad (16.23) \end{aligned}$$

где  $f_n(a)$  и  $f_n^{(1)}(a)$  ( $n = 2, 3, 4, 5, 6$ ) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} f_3(a) &= -\frac{4(c' - c'')}{3\pi} \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[ 1 + 2 \frac{x_0^2}{a^2} \right] a, \\ f_5(a) &= \frac{4(c' - c'')}{15\pi} \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[ 3 - 11 \frac{x_0^2}{a^2} + 8 \frac{x_0^4}{a^4} \right] a, \\ f_2^{(1)}(a) + f_4^{(1)}(a) &= -\frac{8(c' - c'')}{\pi} \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left[ 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right], \\ f_4^{(1)}(a) + f_6^{(1)}(a) &= -\frac{4(c' - c'')}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) \left( 1 - 4 \frac{x_0^2}{a^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \left( 1 - 2 \frac{x_0^2}{a^2} \right) \right]. \quad (16.24) \end{aligned}$$

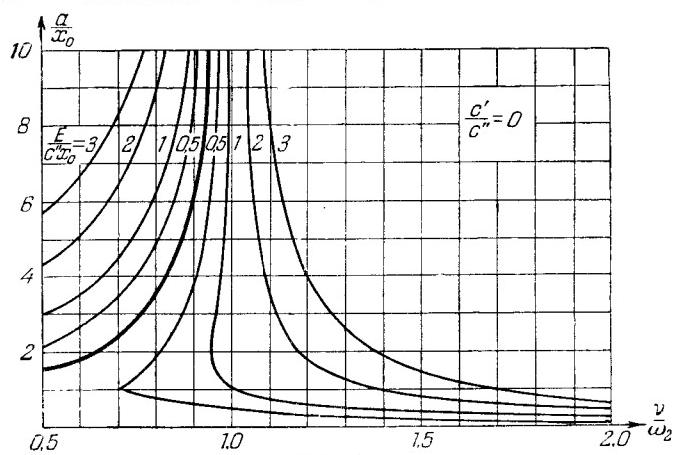


Рис. 88.

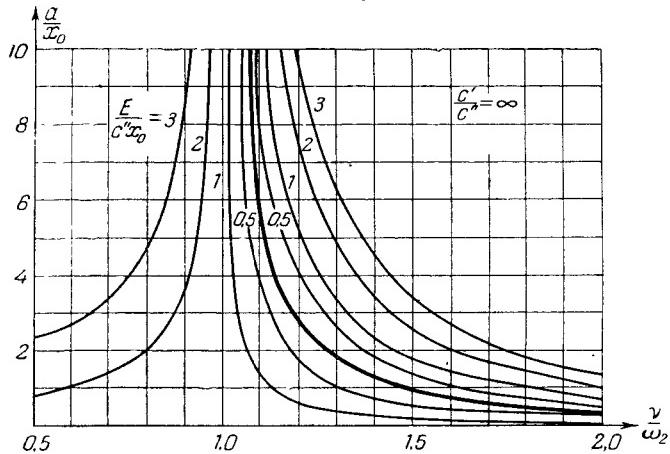


Рис. 89.

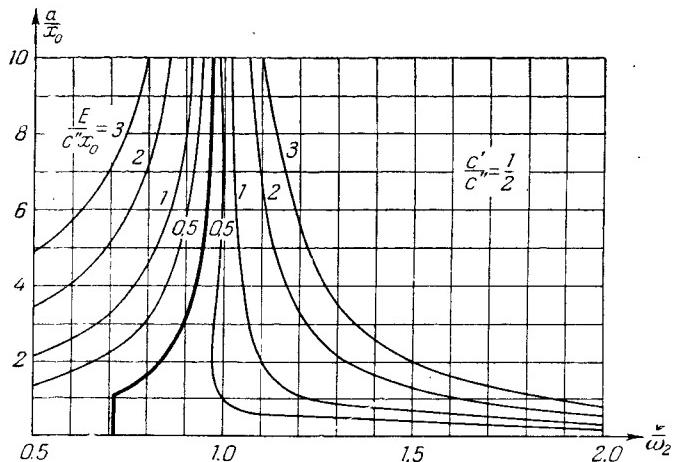


Рис. 90.

При помощи зависимости (16.23) строим резонансные кривые во втором приближении (см. рис. 92, 93, 94, на которых резонансные кривые, а также скелетные кривые во втором приближении начертаны пунктиром, причем следует заметить, что масштаб здесь значительно увеличен; сплошные линии — кривые в первом приближении).

На рис. 95—98 нами приведены семейства резонансных кривых, построенных с учетом трения согласно формуле (16.10). При построении этих кривых трение принималось пропорциональным скорости, а  $\frac{\delta}{c''} = 0,1$ .

Рассмотрим еще случай, когда характеристика нелинейной восстанавливающей силы имеет вид, приведенный на рис. 99. Для вычисления  $\omega_e(a)$  согласно формуле (16.9) имеем:

$$F(x) = \begin{cases} c''x & \text{для } -x_1 \leq x \leq x_1, \\ c''x + (c'' - c') (x_1 - x) & \Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2, \\ c''x + (c'' - c') (x_1 - x) & \Rightarrow -x_2 \leq x \leq -x_1, \\ c''x - (c'' - c') (x_2 - x_1) & \Rightarrow x_2 \leq x \leq \infty, \\ c''x + (c'' - c') (x_2 - x_1) & \Rightarrow -\infty \leq x \leq -x_2. \end{cases} \quad (16.25)$$

Для определения интеграла, стоящего в правой части формулы (16.9), обозначаем через  $\phi_1$  и  $\phi_2$  наименьшие корни уравнений  $x_1 = a \cos \phi$ ,  $x_2 = a \cos \phi$ . Тогда можем написать:

$$F(a \cos \phi) = \begin{cases} c''a \cos \phi, & \phi_1 \leq \phi \leq \pi - \phi_1, \\ c''a \cos \phi + (c'' - c') (a \cos \phi_1 - a \cos \phi), & \phi_2 \leq \phi \leq \phi_1, \\ c''a \cos \phi + (c'' - c') (a \cos \phi_1 - a \cos \phi), & \pi - \phi_1 \leq \phi \leq \pi - \phi_2, \\ c''a \cos \phi - (c'' - c') (a \cos \phi_2 - a \cos \phi_1), & 0 \leq \phi \leq \phi_2, \\ c''a \cos \phi + (c'' - c') (a \cos \phi_2 - a \cos \phi_1), & \pi - \phi_2 \leq \phi \leq \pi. \end{cases} \quad (16.26)$$

После этого, разбивая промежуток интегрирования на пять частей, получим для  $\omega_e^2(a)$  следующее выражение:

$$\omega_e^2(a) = \omega^2 + \frac{2(c'' - c')}{\pi} \left\{ \arccos \frac{x_2}{a} - \arccos \frac{x_1}{a} + \right. \\ \left. + \frac{x_1}{a} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} - \frac{x_2}{a} \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \right\}. \quad (16.27)$$

Полагая для упрощения, что трение пропорционально первой степени скорости  $\varepsilon f_1 \left( \frac{dx}{dt} \right) = -2\delta \frac{dx}{dt}$ , имеем:

$$\delta_e(a) = \delta.$$

Для построения графика зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней возмущающей силы получаем следующую

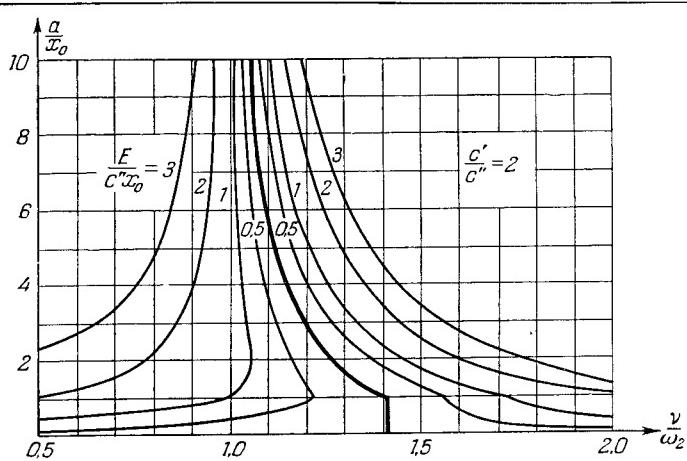


Рис. 91.

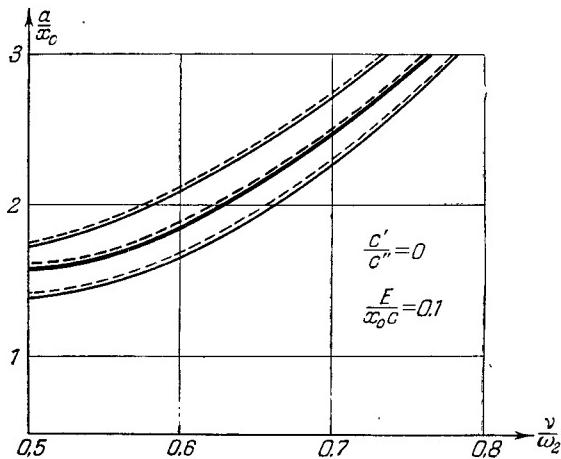


Рис. 92.

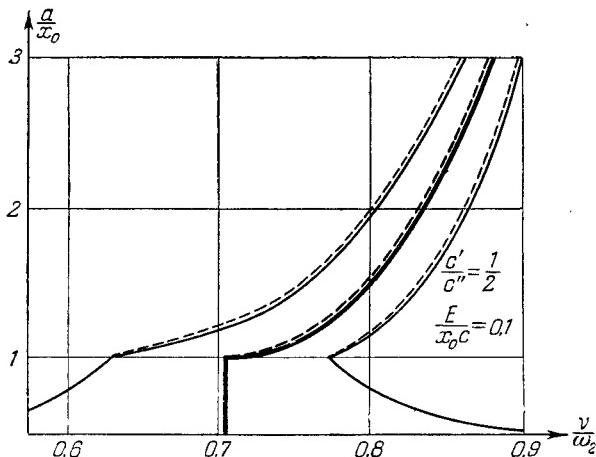
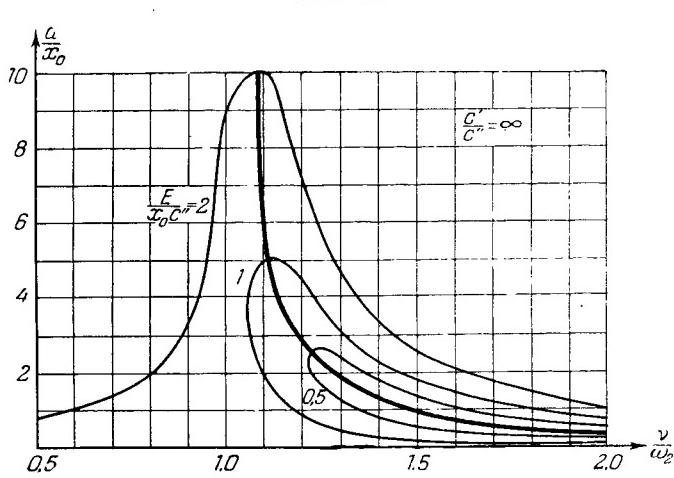
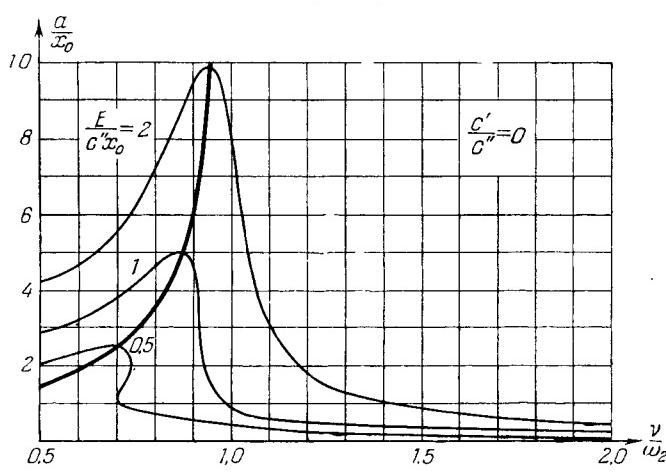
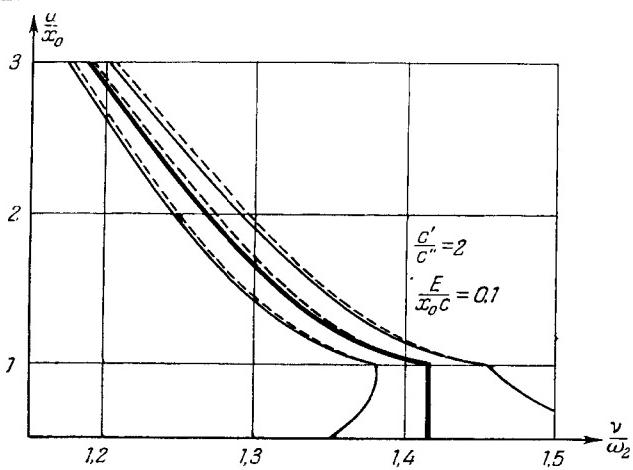


Рис. 93.



зависимость:

$$\nu^2 = \omega_e^2(a) \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 E^2}{a^2} - 4\dot{\omega}^2 \omega^2}, \quad (16.28)$$

при помощи которой строим график, определяя значение  $\nu$  в зависимости от значений  $a$ . Согласно соотношению

$$\nu = \omega_e(a) \quad (16.29)$$

строим кривую зависимости собственной частоты от амплитуды. На

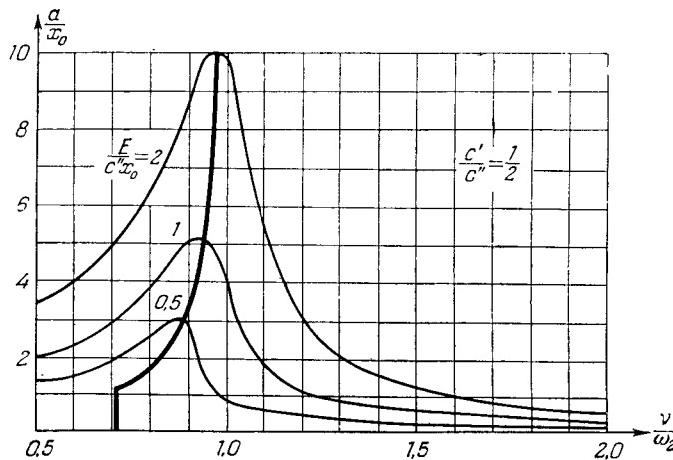


Рис. 97.

рис. 100 нами приведено семейство кривых, характеризующих зависимость амплитуды от частоты внешней силы при различных амплитудах внешней

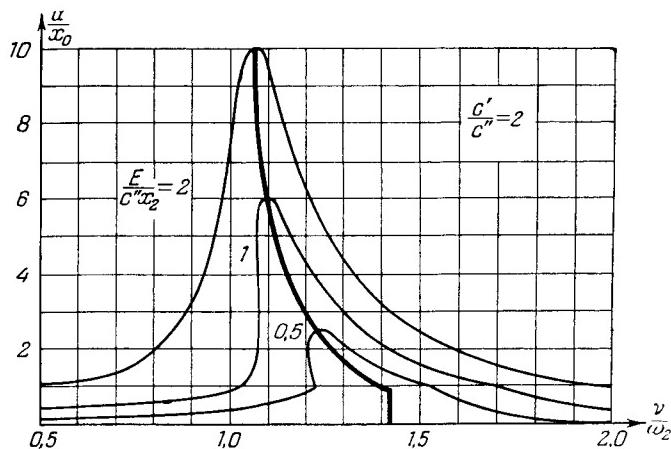


Рис. 98.

силы (семейство резонансных кривых). При помощи критериев, приведенных на стр. 189, нетрудно определить устойчивые и неустойчивые зоны этих резонансных кривых, а также точки «срыва» и «скакак» амплитуды. На рис. 101 нами приведена одна из резонансных кривых, причем участки

этой кривой, начерченные жирной линией, соответствуют устойчивым амплитудам, а начерченные тонкой линией соответствуют неустойчивым амплитудам.

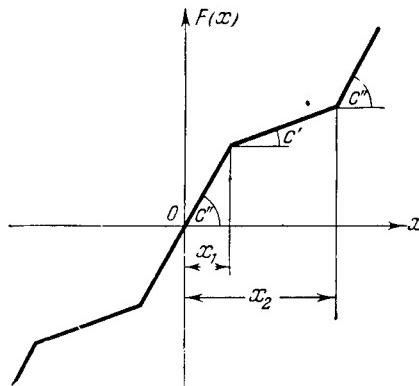


Рис. 99.

Так, согласно резонансной кривой, приведенной на рис. 101, при бесконечно медленном изменении частоты внешней силы (т. е. при стационарном режиме), начиная от малых значений, амплитуда вынужденных колебаний нарастает сначала по кривой  $MA$ , из точки  $A$  значение амплитуды скачком переходит в точку  $B$  и далее изменяется по кривой  $BC$ . В точке  $C$  происходит срыв амплитуды — амплитуда скачком переходит в точку  $D$  и при дальнейшем увеличении частоты изменяется по кривой  $DN$ .

Если теперь начать уменьшать частоту приложенной силы, то амплитуда изменяется по кривой  $NDE$ . Из точки  $E$  в точку  $F$  и дальше будет изменяться по

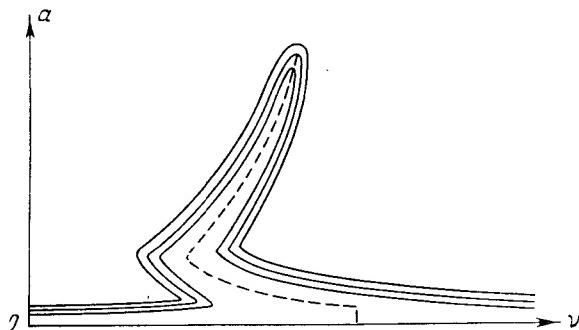


Рис. 100.

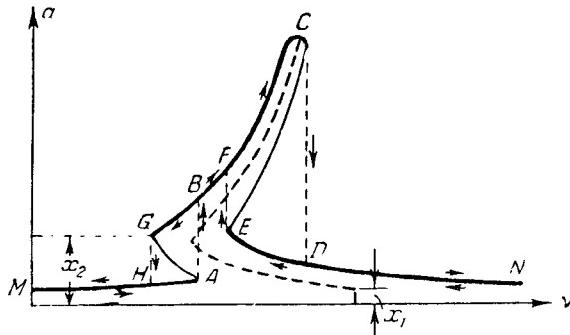


Рис. 101.

кривой  $FBG$ . Дойдя до точки  $G$ , амплитуда скачком перейдет в точку  $H$ , после чего будет изменяться по кривой  $HM$ . Таким образом, мы здесь также наблюдаем характерные для нелинейной колебательной системы гистерезисные явления, аналогичные рассмотренным нами на стр. 191.

Приведенные примеры показывают большую гибкость и широкий диапазон применения изложенного метода. Получаемые формулы даже для сложной характеристики нелинейной восстанавливающей силы достаточно просты. В случае, если характеристика составлена из двух отрезков прямых, получим совсем простую формулу (заметим, что в первом приближении для стационарного режима получаем результат, совпадающий с результатом Лурье и Чекмарева). Если характеристика нелинейной восстанавливающей силы состоит из нескольких прямолинейных отрезков, то наши формулы претерпевают совершенно незначительное изменение, в то время как метод Ден-Гартога настолько усложняется, что становится практически неприменимым.

### § 17. Параметрический резонанс

В настоящем параграфе остановимся на рассмотрении некоторых колебательных систем, изучение которых сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с переменными (зависящими от времени) коэффициентами. Наибольший интерес представляет случай периодических коэффициентов. Как известно, кроме проблем небесной механики, ряд чисто технических задач приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами\*).

Одной из типичных задач, сводящихся к рассмотрению указанных уравнений, является задача о поперечных колебаниях стержня, находящегося под воздействием продольных периодических сил.

Допустим, что на стержень, длиной  $l$ , закрепленный шарнирно по концам, с площадью поперечного сечения  $A$ , с жесткостью  $EI$  и плотностью  $\gamma$ , действует периодическая продольная сила

$$F = F(t) \quad (17.1)$$

(см. рис. 102).

Тогда дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня может быть представлено в следующем виде:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \quad (17.2)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

В случае шарнирно закрепленных концов граничные условия для дифференциального уравнения (17.2) будут:

$$\left. \begin{array}{l} y \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0, \\ y \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0. \end{array} \right\} \quad (17.3)$$

Очевидно, что уравнение (17.2) вместе с граничными условиями (17.3) путем подстановки

$$y = x \sin \pi \frac{z}{l} \quad (17.4)$$

\*.) См., например, работы В. Н. Челомея [46, 47].

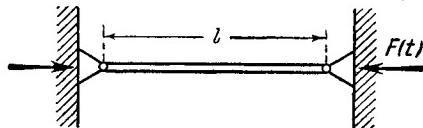


Рис. 102.

может быть сведено к следующему:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \left[ 1 - \frac{l^2}{\pi EI} F(t) \right] x = 0, \quad (17.5)$$

где введено обозначение

$$\omega^2 = \frac{g\pi^4 EI}{\gamma Al^4}. \quad (17.6)$$

Уравнение (17.5) является известным уравнением Хилла.

К уравнению (17.5) может быть приведена также задача о колебаниях математического маятника, ось вращения которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении, задача о колебаниях механической системы с периодически изменяющейся жесткостью, задачи амплитудной модуляции и многие другие.

В случае, если периодическая функция  $F(t)$  имеет следующий вид:

$$F(t) = P_0 \cos \nu t, \quad (17.7)$$

то вместо (17.5) получаем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \left[ 1 - \frac{l^2 P_0}{\pi EI} \cos \nu t \right] x = 0, \quad (17.8)$$

которое называется уравнением Матье.

Как уравнение Матье, так и уравнение Хилла являются частными случаями дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t) x = 0, \quad (17.9)$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  — периодические функции  $t$  с периодом  $\Omega$ .

Уравнения типа (17.9) подробно исследовались рядом ученых, однако существующие теории (см., например, А. М. Ляпунов [27]) дают возможность производить только качественный анализ поведения решений уравнения (17.9) и не указывают способов построения приближенных решений или способов, позволяющих решить вопрос об устойчивости этих решений.

Для частного случая уравнения (17.9) — для уравнения Матье — построены решения (функции Матье), которым посвящена обширная литература.

Во многих случаях дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами могут быть сведены к рассмотренному в § 13 уравнению (13.1), и поэтому приближенные решения можно построить согласно изложенному методу.

Ниже мы построим приближенные решения, а также определим зоны устойчивости в первом и во втором приближении для простейшего случая уравнения с периодическими коэффициентами (17.9) — для уравнения Матье — и сопоставим полученные результаты с решениями, известными в литературе.

Итак, перейдем к построению приближенных решений для уравнения (17.8), которое можем записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \nu t) x = 0, \quad (17.10)$$

где обозначено

$$h = \frac{P_0 l^2}{\pi EI} \ll 1.$$

Как уже указывалось, в первом приближении мы можем рассматривать для уравнения типа (17.10) лишь главный демультиликационный резонанс  $p=1$ ,  $q=2$ . Предполагая, что  $\omega \approx \frac{v}{2}$ , построим приближенные решения, соответствующие резонансному случаю.

В первом приближении, воспользовавшись формулами (14.25), имеем:

$$x = a \cos\left(\frac{v}{2}t + \vartheta\right), \quad (17.11)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \frac{v}{2} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\vartheta. \end{cases} \quad (17.12)$$

Чтобы решить полученную систему уравнений первого приближения, введем новые переменные  $u$  и  $v$  согласно формулам

$$u = a \cos \vartheta, \quad v = a \sin \vartheta. \quad (17.13)$$

Дифференцируя выражения (17.13) и принимая во внимание уравнения (17.12), имеем:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \vartheta - \frac{d\vartheta}{dt} a \sin \vartheta = \left[ -\frac{h\omega^2}{2v} - \left( \omega - \frac{v}{2} \right) \right] a \sin \vartheta, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{da}{dt} \sin \vartheta + \frac{d\vartheta}{dt} a \cos \vartheta = \left[ -\frac{h\omega^2}{2v} + \left( \omega - \frac{v}{2} \right) \right] a \cos \vartheta \end{cases} \quad (17.14)$$

или

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left[ -\frac{h\omega^2}{2v} - \left( \omega - \frac{v}{2} \right) \right] v, \\ \frac{dv}{dt} = \left[ -\frac{h\omega^2}{2v} + \left( \omega - \frac{v}{2} \right) \right] u. \end{cases} \quad (17.15)$$

Таким образом, уравнения первого приближения (17.12) мы привели к системе двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Характер решений системы уравнений (17.15) и, следовательно, решений системы (17.12) зависит от корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{h\omega^2}{2v} + \left( \omega - \frac{v}{2} \right) \\ \frac{h\omega^2}{2v} - \left( \omega - \frac{v}{2} \right) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{h^2\omega^4}{4v^2} + \left( \omega - \frac{v}{2} \right)^2 = 0. \quad (17.16)$$

Обозначим корни этого уравнения через

$$+\lambda, \quad -\lambda,$$

причем

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2\omega^4}{4v^2} - \left( \omega - \frac{v}{2} \right)^2}. \quad (17.17)$$

Тогда общее решение системы дифференциальных уравнений (17.15) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}, \\ v &= C_1 \frac{\frac{-h\omega^2}{2\nu} + \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)}{\lambda} e^{\lambda t} + C_2 \frac{\frac{h\omega^2}{2\nu} - \left(\omega - \frac{\nu}{2}\right)}{\lambda} e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (17.18)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

После этого определяем амплитуду  $a$  и фазу колебаний  $\vartheta$ , входящие в правую часть формулы (17.11). Имеем:

$$\begin{aligned} a^2 &= u^2 + v^2, \\ \vartheta &= \arctg \frac{v}{u}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (17.19)$$

Согласно формулам (17.17), (17.18) и (17.19) очевидно, что при  $\lambda$  мнимом амплитуда  $a$  будет ограниченной функцией времени.

В случае, если  $\lambda$  действительное, амплитуда  $a$  будет возрастать по экспоненциальному закону. Этот случай соответствует наличию в системе основного демультиликационного резонанса.

Согласно равенству (17.17) условие вещественности  $\lambda$  будет следующее:

$$\frac{h\omega^2}{2\nu} > \left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|, \quad (17.20)$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{h\omega}{4} > \left| \omega - \frac{\nu}{2} \right|,$$

так как  $\nu = 2\omega + O(h)$ .

Таким образом, если частота внешнего возбуждения находится в интервале

$$2\omega \left( 1 - \frac{h}{4} \right) < \nu < 2\omega \left( 1 + \frac{h}{4} \right), \quad (17.21)$$

то в системе возникает главный демультиликационный резонанс, при котором амплитуда колебаний возрастает по экспоненциальному закону. Ввиду того, что этот резонанс возникает в результате периодического изменения одного из параметров колебательной системы, его часто называют параметрическим резонансом.

Неравенство (17.21) определяет собой зону неустойчивости, внутри которой положение равновесия  $x=0$  оказывается неустойчивым и в системе самовозбуждаются колебания.

Перейдем теперь к построению и анализу второго приближения.

Согласно формулам (14.5), (14.21), (14.25) и (14.26) во втором приближении имеем:

$$x = a \cos \left( \frac{\nu}{2} t + \vartheta \right) - \frac{ah\omega}{8 \left( \omega + \frac{\nu}{2} \right)} \cos \left( \frac{3}{2} \nu t + \vartheta \right), \quad (17.22)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

Система (17.23) заменой переменных (17.13) тоже сводится к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left[ -\frac{h\omega^2}{2\nu} - \left( \omega - \frac{\nu}{2} \right) - \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} \right] v, \\ \frac{dv}{dt} &= \left[ -\frac{h\omega^2}{2\nu} + \left( \omega - \frac{\nu}{2} \right) + \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} \right] u. \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Корни характеристического уравнения в данном случае имеют вид

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{h^2\omega^4}{4\nu^2} - \left[ \omega - \frac{\nu}{2} + \frac{h^2(\omega + \nu)\omega}{32\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right)} \right]^2}, \quad (17.25)$$

и, следовательно, зона неустойчивости во втором приближении определяется с точностью до величин второго порядка малости включительно следующим неравенством:

$$2\omega \left[ 1 - \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} \right] < \nu < 2\omega \left[ 1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} \right]. \quad (17.26)$$

Найдем теперь соотношение между  $\omega$  и  $h$ , при котором решение уравнения (17.10) будет периодическим с периодом  $\frac{4\pi}{\nu}$ . Это возможно в случае, если в формулах (17.11) и (17.22)  $a = \text{const}$ . Для этого необходимо, чтобы  $\lambda$ , определяемая выражением (17.17) или (17.25), равнялась нулю.

Таким образом, соотношение, которому должны удовлетворять  $\omega$  и  $h$  для того, чтобы  $x$  являлось функцией периодической, будет в первом приближении:

$$\frac{2\omega}{\nu} = 1 \pm \frac{h}{4}; \quad (17.27)$$

во втором приближении:

$$\frac{2\omega}{\nu} = 1 \pm \frac{h}{4} + \frac{5h^2}{64}, \quad (17.28)$$

или соответственно с той же степенью точности в первом приближении:

$$\frac{4\omega^2}{\nu^2} = 1 \pm \frac{h}{2} \quad (17.29)$$

и во втором приближении:

$$\frac{4\omega^2}{\nu^2} = 1 \pm \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}. \quad (17.30)$$

Соотношения (17.29) и (17.30) представляют собой уравнения кривых в плоскости  $(\frac{4\omega^2}{v^2}, h)$  (в первом и во втором приближении), на которых решение уравнения (17.10) будет периодическим, т. е. уравнения граничных кривых областей устойчивости решений уравнения (17.10) (рис. 103).

Для периодических решений с периодом  $\frac{4\pi}{v}$  из (17.11) и (17.22), принимая во внимание (17.29) и (17.30), находим следующие выражения:

$$x_1 = a_0 \cos \left( \frac{v}{2} t + \vartheta_0 \right), \quad (17.31)$$

$$x_{II} = a_0 \cos \left( \frac{v}{2} t + \vartheta_0 \right) - \frac{a_0 h}{16} \cos \left( \frac{3v}{2} t + \vartheta_0 \right), \quad (17.32)$$

в которых индекс при  $x$  указывает на номер приближения.

Сопоставим теперь найденные формулы с результатами, полученными при определении непосредственно периодических решений уравнения (17.10) в случае малых  $h$ .

Для этого воспользуемся приемом, с помощью которого Матье находил решения уравнения (17.10) и уравнения граничных кривых, предполагая параметр  $h$  малым. (Этот прием следует непосредственно из метода А. Пуанкаре [38] нахождения периодических решений.)

Ищем периодическое решение уравнения (17.10) с периодом  $\frac{4\pi}{v}$  в виде ряда

$$x = x_0 + h x_1 + h^2 x_2 + \dots, \quad (17.33)$$

в котором  $x_0, x_1, x_2, \dots$  должны быть периодическими функциями с периодом  $\frac{4\pi}{v}$ .

Выражение для  $\omega^2$  тоже представляем в виде ряда

$$\omega^2 = \frac{v^2}{4} + h \omega_1 + h^2 \omega_2 + \dots \quad (17.34)$$

Подставляя правые части (17.33) и (17.34) в уравнение (17.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{v^2}{4} x_0 &= 0, \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{v^2}{4} x_1 &= \left( \frac{v^2}{4} \cos vt - \omega_1 \right) x_0, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{v^2}{4} x_2 &= \left( \frac{v^2}{4} \cos vt - \omega_1 \right) x_1 + (\omega_1 \cos vt - \omega_2) x_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (17.35)$$

из которой необходимо определить функции  $x_0, x_1, x_2, \dots$  и величины  $\omega_1, \omega_2, \dots$

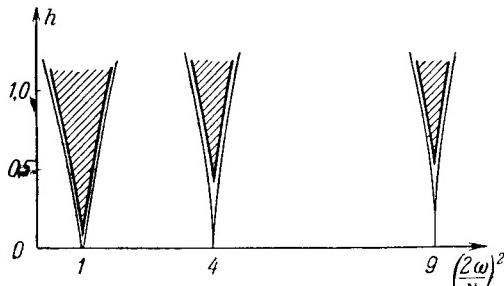


Рис. 103.

Решая первое уравнение системы (17.35), находим:

$$x_0 = a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right), \quad (17.36)$$

где  $a_0$  и  $\vartheta_0$  — произвольные постоянные.

Подставляя значение  $x_0$  (17.36) в правую часть второго уравнения системы (17.35), имеем:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4}x_1 = -\omega_1 a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right) + \frac{\nu^2}{4}a_0 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_0\right) \cos \nu t, \quad (17.37)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4}x_1 &= -\left(\omega_1 - \frac{\nu^2}{8}\right)a_0 \cos \frac{\nu}{2}t \cos \vartheta_0 + \\ &+ \left(\omega_1 + \frac{\nu^2}{8}\right)a_0 \sin \frac{\nu}{2}t \sin \vartheta_0 + \frac{\nu^2}{8}a_0 \cos\left(\frac{3}{2}\nu t + \vartheta_0\right). \end{aligned} \quad (17.38)$$

Для того чтобы  $x_1$  было периодической функцией с периодом  $\frac{4\pi}{\nu}$ , необходимо, чтобы коэффициенты при  $\cos \frac{\nu}{2}t$  и  $\sin \frac{\nu}{2}t$  в правой части (17.38) равнялись нулю. Тогда получим:

$$\omega_1 = \frac{\nu^2}{8}, \quad \sin \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = 0$$

или

$$\omega_1 = -\frac{\nu^2}{8}, \quad \cos \vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

После этого находим выражение для  $x_1$ :

$$x_1 = -\frac{a_0}{16} \cos \frac{3\nu}{2}t + u \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right), \quad (17.39)$$

или

$$x_1 = \frac{a_0}{16} \sin \frac{3\nu}{2}t + u \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right). \quad (17.40)$$

Подставляя значения  $x_0$  и  $x_1$  в правую часть третьего уравнения системы (17.35), имеем для случая  $\omega_1 = \frac{\nu^2}{8}$ ,  $\vartheta_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\nu^2}{4}x_2 &= -\left(\frac{\nu^2}{4} \cos \nu t - \omega_1\right)\frac{a}{16} \cos \frac{3\nu}{2}t - \\ &- \left(\frac{\nu^2}{4} \cos \nu t - \omega_1\right)u \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right) + (\omega_1 \cos \nu t - \omega_2)a \cos \frac{\nu}{2}t. \end{aligned}$$

Приравнивая опять коэффициенты при  $\cos \frac{\nu}{2}t$  и  $\sin \frac{\nu}{2}t$  нулю, получаем:

$$\omega_2 = \frac{\nu^2}{16} - \frac{\nu^2}{128} = \frac{7\nu^2}{128}, \quad (17.41)$$

$$\frac{\nu^2}{4}u \sin \varphi + \frac{\nu^2}{8}u \sin \varphi = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sin \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

Аналогично для второго случая получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \frac{7\nu^2}{128}, \\ \cos \varphi &= 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.42)$$

Подставляя полученные значения  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  в правые части формул (17.33) и (17.34), имеем:

$$x = a_0 \cos \frac{\nu}{2} t - \frac{a_0 h}{16} \cos \frac{3\nu}{2} t, \quad (17.43)$$

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{4} + \frac{h\nu^2}{8} + \frac{7h^2\nu^2}{128}, \quad (17.44)$$

или

$$x = a_0 \sin \frac{\nu}{2} t + \frac{a_0 h}{16} \sin \frac{3\nu}{2} t, \quad (17.45)$$

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{4} - \frac{h\nu^2}{8} + \frac{7h^2\nu^2}{128}. \quad (17.46)$$

В этих формулах мы для удобства включили  $hu$  в полную амплитуду первой гармоники  $a_0$ .

Полагая  $\nu = 2$  и  $a_0 = 1$ , находим:

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t, \\ \omega^2 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}; \end{array} \right\} \quad (17.47)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin t + \frac{h}{16} \sin 3t, \\ \omega^2 = 1 - \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32}. \end{array} \right\} \quad (17.48)$$

Выражения (17.47) и (17.48), как и следовало ожидать, совпадают с первыми двумя членами в разложениях функций Маттье  $C_n$  и  $S_n$  (для  $n = 1$ ) в ряд Фурье. Действительно, имеем\*):

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \cos t - \frac{h}{16} \cos 3t + O(h^2), \\ \omega_{C_1}^2 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} + O(h^3), \end{array} \right\} \quad (17.49)$$

а также

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = \sin t + \frac{h}{16} \sin 3t + O(h^2), \\ \omega_{S_1}^2 = 1 - \frac{h}{2} + \frac{7h^2}{32} + O(h^3). \end{array} \right\} \quad (17.50)$$

Остановимся теперь на построении приближенных решений уравнения (17.10) и определим границы областей неустойчивости в случае  $\omega \approx \frac{\nu}{2} p$ , где  $p = 2, 3$ .

Для случая  $p = 2$ , т. е.  $\omega \approx \nu$ , полагаем в формулах (14.21), (14.23) и (14.26)  $p = 2$ ,  $q = 2$ .

Тогда для второго приближения найдем следующее выражение:

$$x = a \cos(\nu t + \vartheta) + \frac{ha\omega^2}{2\nu(\nu + 2\omega)} \cos(2\nu t + \vartheta) + \frac{h\omega^2 a}{2\nu(\nu - 2\omega)} \cos \vartheta, \quad (17.51)$$

\*.) См., например, М. Д. Стrett, Функции Ляме, Маттье и родственные им в физике и технике, стр. 35—39.

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из уравнения второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{h^2 a \omega^4}{8\gamma^2 (2\omega - \gamma)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \gamma - \frac{h^2 \omega^4}{4\gamma (4\omega^2 - \gamma^2)} + \frac{h^2 \omega^4}{8\gamma^2 (2\omega - \gamma)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.52)$$

Из системы (17.52), так же как и в предыдущем случае, находим условие вещественности корней характеристического уравнения

$$\left| \omega - \gamma - \frac{h^2 \omega^4}{4\gamma (4\omega^2 - \gamma^2)} \right| < \left| \frac{h^2 \omega^4}{8\gamma^2 (2\omega - \gamma)} \right|, \quad (17.53)$$

и, следовательно, зона неустойчивости определяется с точностью до величин второго порядка малости неравенством

$$4 + \frac{2h^2 \omega^4}{\gamma^2 (4\omega^2 - \gamma^2)} - \frac{h^2 \omega^4}{\gamma^3 (2\omega - \gamma)} < \left( \frac{2\omega}{\gamma} \right)^2 < 4 + \frac{2h^2 \omega^4}{\gamma^2 (4\omega^2 - \gamma^2)} + \frac{h^2 \omega^4}{\gamma^3 (2\omega - \gamma)} \quad (17.54)$$

или, принимая во внимание, что  $\omega \approx \gamma$ , с той же степенью точности неравенством

$$4 + \frac{2h^2}{3} - h^2 < \left( \frac{2\omega}{\gamma} \right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3} + h^2. \quad (17.55)$$

Для случая  $p = 3$ , т. е.  $\omega \approx \frac{3}{2}\gamma$ , необходимо подсчитать третье приближение, так как во втором приближении мы получаем только поправку, уточняющую значение собственной частоты  $\omega$ . После ряда выкладок находим:

$$\begin{aligned} x = a \cos \left( \frac{3}{2}\gamma t + \vartheta \right) &- \frac{\omega^2 h a}{2} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{5}{2}\gamma t + \vartheta \right)}{\gamma (2\omega + \gamma)} - \frac{\cos \left( \frac{1}{2}\gamma t + \vartheta \right)}{\gamma (2\omega - \gamma)} \right\} + \\ &+ \frac{h^2 \omega^4 a}{16\gamma^2} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{7}{2}\gamma t + \vartheta \right)}{(2\omega + \gamma)(\gamma + \omega)} + \frac{\cos \left( \frac{\gamma}{2}t - \vartheta \right)}{(2\omega - \gamma)(\omega - \gamma)} \right\}, \end{aligned} \quad (17.56)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений третьего приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= - \frac{h^3 \omega^6 a}{3 \cdot 2^5 \gamma^3 (2\omega - \gamma) (\omega - \gamma)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{3}{2}\gamma - \frac{\omega^4 h^2}{3 \cdot 2 \gamma (4\omega^2 - \gamma^2)} - \frac{h^3 \omega^6}{3 \cdot 2^5 \gamma^3 (2\omega - \gamma) (\omega - \gamma)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.57)$$

Попутно заметим, что в общем случае из-за громоздкости не выписывались выражения для третьего приближения. Структура же уравнений (17.57) свидетельствует лишний раз о том, что в конкретных случаях даже уравнения третьего приближения весьма просты.

Из системы уравнений (17.57) находим для зоны неустойчивости неравенство

$$\begin{aligned} 9 + \frac{2\omega^4 h^2}{\gamma^2 (4\omega^2 - \gamma^2)} - \frac{\omega^6 h^3}{2^3 \gamma^4 (2\omega - \gamma) (\omega - \gamma)} &< \left( \frac{2\omega}{\gamma} \right)^2 < 9 + \\ &+ \frac{2\omega^4 h^2}{\gamma^2 (4\omega^2 - \gamma^2)} + \frac{\omega^6 h^3}{2^3 \gamma^4 (2\omega - \gamma) (\omega - \gamma)}, \end{aligned} \quad (17.58)$$

или с той же степенью точности

$$9 + \frac{81h^2}{64} - \frac{3^6 h^3}{2^9} < \left( \frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64} + \frac{3^6 h^3}{2^9}. \quad (17.59)$$

Приведем здесь также неравенство определяющее зону неустойчивости в случае  $\omega \approx \frac{\nu}{2}$ . Согласно (17.20) имеем:

$$1 - \frac{h}{2} < \left( \frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 1 + \frac{h}{2}. \quad (17.60)$$

Из анализа неравенств (17.55), (17.59) и (17.60) очевидно, что величина (ширина) области неустойчивости уменьшается с ее порядком  $p$ , как  $h^p$ .

Таким образом, высшие резонансы  $p = 2, 3, \dots$  можем наблюдать, рассматривая соответственно второе, третье и т. д. приближения, а при рассмотрении точного решения уравнения (17.10) получим бесконечный спектр резонансов.

На рис. 103 приведены первые три зоны неустойчивости, построенные согласно неравенствам (17.55), (17.59) и (17.60).

Заметим, что при наличии затухания, т. е. для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 (1 - h \cos \nu t) x = 0, \quad (17.61)$$

эти зоны уменьшаются (см. на рис. 103 заштрихованные области). Нетрудно показать, что вместо рассматриваемых неравенств при наличии трения мы получим следующие:

$$1 - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}} < \left( \frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 1 + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}}, \quad (17.62)$$

$$4 + \frac{2h^2}{3} - \sqrt{h^4 - 64 \frac{\delta^2}{\nu^2}} < \left( \frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3} + \sqrt{h^4 - 64 \frac{\delta^2}{\nu^2}}, \quad (17.63)$$

$$9 + \frac{81h^2}{64} - \sqrt{\frac{3^{12}h^6}{2^{18}} - 3^{14} \frac{\delta^2}{\nu^2}} < \left( \frac{2\omega}{\nu} \right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64} + \sqrt{\frac{3^{12}h^6}{2^{18}} - 3^{14} \frac{\delta^2}{\nu^2}}. \quad (17.64)$$

Неравенства (17.62), (17.63) и (17.64) содержат еще дополнительные условия:

для первой области

$$h > 4 \frac{\delta}{\nu}, \quad (17.65)$$

для второй

$$h > 2 \sqrt{2 \frac{\delta}{\nu}}, \quad (17.66)$$

для третьей

$$h > \frac{8}{3} \sqrt[6]{\frac{4\delta^3}{9\nu^2}}. \quad (17.67)$$

Как нетрудно видеть, при наличии затухания, для того чтобы был заметен резонанс  $\omega \approx \nu$ , требуется гораздо большая глубина модуляции параметра  $h\nu^2$ , чем в случае резонанса  $\omega \approx \frac{\nu}{2}$ . Еще тяжелее осуществить резонанс  $\omega \approx \frac{3}{2}\nu$ .

Поэтому обычно наибольший практический интерес представляет резонанс  $\omega \approx \frac{v}{2}$ .

Рассмотрим теперь параметрическое возбуждение в нелинейной колебательной системе.

Заметим, что приведенный выше случай показывает, что в линейной колебательной системе при параметрическом изменении массы или жесткости системы при определенных условиях положение равновесия становится неустойчивым. Даже при очень малых значениях  $\omega^2 h$  (глубины модуляции) в системе при определенном соотношении частот возникают колебания, амплитуда которых неограниченно возрастает.

При наличии в линейной системе диссипативных сил влияние последних сказывается только на условии возбуждения колебаний — при наличии диссипации глубина модуляции, при которой наступает резонанс, имеет некоторый нижний предел, отличный от нуля и зависящий от величины декремента затухания. Стационарных колебаний при наличии трения в линейной системе не будет.

В нелинейной колебательной системе дело обстоит иначе. Как будет показано ниже, при изменении рассматриваемых параметров колебательной системы по гармоническому закону с частотой, для определенности, например, равной или близкой к удвоенной собственной частоте системы, наступает резонанс. В данном случае возможны устойчивые режимы стационарных колебаний.

В качестве простейшего примера рассмотрим колебательную систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(1 - h \cos vt)x + 2\delta \frac{dx}{dt} + \gamma x^3 = 0. \quad (17.68)$$

Предположим, что колебания, описываемые уравнением (17.68), близки к гармоническим. Тогда решение уравнения (17.68), соответствующее наличию в системе основного демультиликационного резонанса, ищем в виде

$$x = a \cos\left(\frac{v}{2}t + \vartheta\right), \quad (17.69)$$

где согласно (14.25)  $a$  и  $\vartheta$  должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta a - \frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{v}{2} + \frac{3\gamma a^2}{4v} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17.70)$$

Для получения стационарных значений амплитуды и фазы колебания приравняем правые части системы (17.70) нулю.

Получаем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} -\delta a - \frac{ah\omega^2}{2v} \sin 2\vartheta &= 0, \\ \omega - \frac{v}{2} + \frac{3\gamma a^2}{4v} - \frac{h\omega^2}{2v} \cos 2\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.71)$$

Исключая из них фазу  $\vartheta$ , находим с точностью до величин первого порядка малости включительно следующее соотношение между ампли-

тудой  $a$  и частотой модуляции  $\nu$ :

$$a^2 = \frac{4}{3\gamma} \left[ \left( \frac{\nu}{2} \right)^2 - \omega^2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{h^2\omega^4 - 4\nu^2\delta^2} \right]. \quad (17.72)$$

При помощи этой зависимости строим резонансную кривую.

В случае, если  $\gamma > 0$ , получим резонансную кривую, приведенную на рис. 104. Анализируя эту кривую, видим, что при увеличении  $\nu$ , начиная с малых значений, колебания в системе будут отсутствовать, пока  $\nu$  не достигнет значения, соответствующего точке  $A$ . При достижении  $\nu$  в точке  $A$  в системе возникнут колебания, и при дальнейшем увеличении  $\nu$  амплитуда этих колебаний будет изменяться вдоль верхней ветви резонансной кривой  $AB$ . В точке  $B$  колебания потеряют свою устойчивость и сорвутся.

При уменьшении  $\nu$ , начиная с больших значений, колебания скачком возбуждаются в точке  $C$  (жесткое возбуждение), и при последующем уменьшении  $\nu$  амплитуда колебаний будет изменяться вдоль кривой  $AB$ .

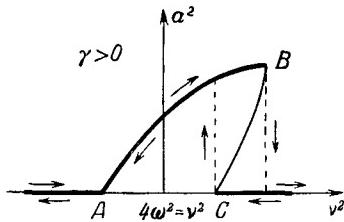


Рис. 104.

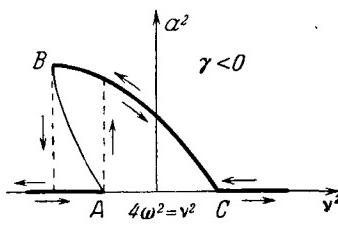


Рис. 105.

В случае, если  $\gamma < 0$ , получим аналогичную картину, только резонансная кривая будет наклонена в сторону малых значений  $\nu$  (рис. 105).

Для определения границ зоны синхронизации необходимо приравнять правую часть выражения для  $a$  нулю.

В первом приближении зона резонанса будет:

$$\omega^2 - \frac{1}{2} \sqrt{h^2\omega^4 - 16\nu^2\delta^2} < \left( \frac{\nu}{2} \right)^2 < \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{h^2\omega^4 - 16\nu^2\delta^2}, \quad (17.73)$$

и потому ширина резонансной зоны

$$\Delta = \sqrt{h^2\omega^4 - 16\nu^2\delta^2}. \quad (17.74)$$

Заметим, что наличие затухания уменьшает интервал  $AC$ , внутри которого возникает параметрический резонанс.

Очевидно, что  $\Delta$  будет действительным, если выполняется неравенство

$$h > \frac{4\delta}{\omega}, \quad (17.75)$$

которое, как указывалось, определяет минимальную глубину модуляции, необходимую для параметрического резонанса при данном затухании.

Рассмотрим еще случай параметрического резонанса в колебательной системе с нелинейным трением.

В случае параметрического возбуждения контура с электронной лампой (рис. 23) уравнение колебаний будет:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\lambda_0 + \lambda_2 x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2(1 - h \cos \nu t)x = 0. \quad (17.76)$$

Допустим, что при отсутствии параметрического возбуждения, т. е. при  $h = 0$ , система несамовозбужденная. Для этого необходимо, чтобы  $\lambda_0 > 0$ .

Составим уравнения первого приближения. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\lambda_0 - \frac{\lambda_2 a^3}{4} - \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta. \end{aligned}$$

(17.77)

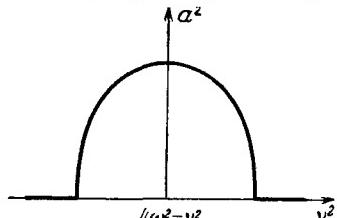


Рис. 106.

Для определения стационарных значений  $a$  и  $\vartheta$  приравниваем правые части уравнений (17.77) нулю:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 a + \frac{\lambda_2 a^3}{4} + \frac{ah\omega^2}{2\nu} \sin 2\vartheta &= 0, \\ \omega - \frac{\nu}{2} - \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

Исключая из полученных соотношений  $\vartheta$ , находим с принятой нами степенью точности следующую зависимость между амплитудой колебания  $a$  и частотой изменения параметра  $\nu$ :

$$a^2 = \frac{2}{\lambda_2 \nu} \sqrt{h^2 \omega^4 - 4 \left( \omega^2 - \left( \frac{\nu}{2} \right)^2 \right)^2} - 4 \frac{\lambda_0}{\lambda_2}. \quad (17.79)$$

При помощи этой зависимости можем построить резонансную кривую (рис. 106), а также найти условия параметрического возбуждения, максимальную амплитуду возбуждения, границы резонансной области и т. д.

## § 18. Воздействие периодических сил на релаксационную систему

Остановимся теперь на исследовании случая воздействия внешней возмущающей силы на релаксационную колебательную систему, характеризуемую уравнением типа

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x) + \varepsilon E \cos \nu t, \quad (18.1)$$

где, как и во второй главе,  $\Phi(x)$  представляет определенную на интервале  $(a, b)$  двузначную функцию.

Для построения решения уравнения (18.1) целесообразно прежде всего преобразовать уравнение (18.1) с целью исключения из него неоднозначной функции  $\Phi(x)$ . Для этого будем исходить из некоторого частного периодического решения уравнения свободных релаксационных колебаний:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x). \quad (18.2)$$

Для определенности примем то из решений уравнения (18.2), в котором величина  $x$  принимает минимальное значение при  $t=0$ .

Обозначая через  $\omega$  частоту свободных релаксационных колебаний, напишем это периодическое решение в виде

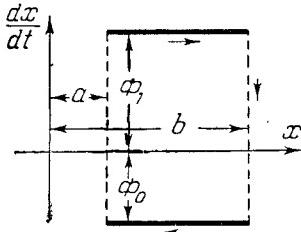


Рис. 107.

$$\frac{dx}{dt} = z(\varphi), \quad (18.3)$$

где  $z(\varphi)$  — некоторая периодическая функция  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Принимая во внимание результаты § 10, легко видеть, что производная  $z'(\varphi)$  в течение одного периода дважды терпит разрыв и что по абсолютной величине она всегда больше некоторой положительной постоянной.

Так, например, если двузначная функция  $\Phi(x)$  имеет для верхней и нижней ветвей соответственно следующие значения:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x) = \Phi_1 = \text{const}, \quad a < x < b, \\ \Phi(x) = -\Phi_0 = \text{const}, \quad a < x < b, \end{array} \right\} \quad (18.4)$$

то решение уравнения (18.2) (рис. 107) можно представить в виде

$$x = a + \Phi_1 t, \quad 0 < t < \frac{b-a}{\Phi_1},$$

$$x = b + \Phi_0 \left[ \frac{b-a}{\Phi_1} - t \right], \quad \frac{b-a}{\Phi_1} < t < (b-a) \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{\Phi_0 \Phi_1}, \quad (18.5)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = (b-a) \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{\Phi_0 \Phi_1} \quad (18.6)$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{b-a} \frac{\Phi_0 \Phi_1}{\Phi_0 + \Phi_1}. \quad (18.7)$$

Обозначим:

$$\varphi_0 = 2\pi \frac{\Phi_0}{\Phi_0 + \Phi_1},$$

тогда периодическое решение  $z(\varphi)$  можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} z(\varphi) = a + \frac{b-a}{\varphi_0} \varphi, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \\ z(\varphi) = a + \frac{b-a}{\varphi_0} \frac{\Phi_0}{\Phi_1} (2\pi - \varphi), \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi. \end{array} \right\} \quad (18.8)$$

Заметим теперь, что, поскольку выражение (18.8) представляет решение уравнения (18.2), функция  $z(\varphi)$  должна удовлетворять тождественно следующему соотношению:

$$\omega z'(\varphi) = \Phi[z(\varphi)]. \quad (18.9)$$

Сделаем теперь в уравнении, описывающем вынужденные колебания (18.1), замену переменных.

Введем вместо неизвестной  $x$  новую неизвестную  $\varphi$  посредством формулы

$$x = z(\varphi). \quad (18.10)$$

Дифференцируя (18.10) и подставляя в (18.1), получим:

$$z'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \Phi[z(\varphi)] + \varepsilon E \cos \nu t, \quad (18.11)$$

или, учитывая тождество (18.9):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon E \cos \nu t}{z'(\varphi)}. \quad (18.12)$$

Преобразованное уравнение (18.12) уже не содержит в правой части неоднозначных функций.

Для удобства построения приближенных решений дифференциальных уравнений обычно желательно, чтобы правая часть была регулярной функцией. В уравнении (18.12) правая часть ввиду наличия в знаменателе разрывной функции  $z'(\varphi)$  не удовлетворяет условию регулярности.

Для регуляризации уравнения (18.12) достаточно обратить роли переменных  $t$  и  $\varphi$  и в дальнейшем считать  $\varphi$  независимой переменной, а  $t$  неизвестной функцией  $\varphi$ , определяемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d(\nu t)}{d\varphi} = \frac{\nu}{\omega + \frac{\varepsilon E \cos \nu t}{z'(\varphi)}}. \quad (18.13)$$

Если обозначить через  $\gamma$  положительную постоянную, такую, что

$$|\Phi(x)| > \gamma, \quad a < x < b, \quad (18.14)$$

то согласно (18.9) и (18.10) имеем:

$$\omega |z'(\varphi)| > \gamma. \quad (18.15)$$

Предположим, что амплитуда  $\varepsilon E$  внешней возмущающей силы меньше  $\gamma$ . Тогда знаменатель в правой части (18.13) положителен и сама правая часть уравнения (18.13) является аналитической функцией неизвестной  $t$ . Уравнения типа (18.13) исследовались А. Пуанкаре и А. Данжуа. Однако при помощи результатов, полученных ими, можно выяснить только качественный характер решений. Для получения методики, дающей возможность производить количественные расчеты, воспользуемся методом усреднения, кратко изложенным в главе I.

Для приложения результатов § 1 к уравнению (18.13) разложим правую часть уравнения (18.13) в ряд по степеням  $\varepsilon$ . Имеем:

$$\frac{d(\nu t)}{d\varphi} = \frac{\nu}{\omega} - \frac{\varepsilon \nu E}{\omega^2} \frac{\cos \nu t}{z'(\varphi)} + \frac{\varepsilon^2 \nu E^2}{\omega^3} \frac{\cos^2 \nu t}{[z'(\varphi)]^2} - \varepsilon^3 \dots \quad (18.16)$$

Будем исследовать уравнение (18.16) для резонансного случая. Предположим, что отношение  $\frac{\nu}{\omega}$  близко к некоторому рациональному числу  $\frac{p}{q}$ , где, как и выше,  $p$  и  $q$ , вообще говоря, небольшие взаимно простые числа.

Тогда, полагая

$$\frac{\nu}{\omega} = \frac{p}{q} + \varepsilon \Delta \quad (18.17)$$

и вводя новую переменную  $\tau$  по формуле

$$\tau = vt - \frac{p}{q} \varphi,$$

окончательно уравнение (18.16) можем записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\varphi} = \varepsilon & \left\{ \Delta - \frac{p}{q} \frac{E}{\omega} \frac{\cos(\tau + \frac{p}{q}\varphi)}{z'(\varphi)} \right\} + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{pE^2}{q\omega^2} \frac{\cos^2(\tau + \frac{p}{q}\varphi)}{[z'(\varphi)]^2} - \frac{\Delta E}{\omega} \frac{\cos(\tau + \frac{p}{q}\varphi)}{z'(\varphi)} \right\} + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (18.18)$$

Уравнение типа (18.18) мы условились выше называть уравнением в стандартной форме.

Приближенное решение этого уравнения может быть построено на основании принципа усреднения.

В первом приближении согласно результатам § 1 главы I решение уравнения (18.18) будет:

$$\tau = \xi, \quad (18.19)$$

где  $\xi$  определяется из усредненного уравнения

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta - \frac{\varepsilon p E}{q \omega} M \left\{ \frac{\cos(\xi + \frac{p}{q}\varphi)}{z'(\varphi)} \right\}. \quad (18.20)$$

Раскроем операцию усреднения в правой части полученного уравнения. Для этого необходимо разложить функцию  $\frac{1}{\omega z'(\varphi)}$  в ряд Фурье.

Имеем:

$$\frac{1}{\omega z'(\varphi)} = \frac{1}{\Phi[z(\varphi)]} = A_0 + \sum_{n \neq 0} A_n \cos(n\varphi + \vartheta_n). \quad (18.21)$$

Заметим теперь, что выражение

$$M \left\{ \cos(n\varphi + \vartheta_n) \cos(\xi + \frac{p}{q}\varphi) \right\}$$

может быть отлично от нуля лишь при  $\frac{p}{q} = n$ . В этом случае имеем:

$$M \left\{ \cos(n\varphi + \vartheta_n) \cos(\xi + n\varphi) \right\} = \frac{1}{2} \cos(\xi - \vartheta_n).$$

Таким образом, если  $\frac{p}{q} \neq n$ , где  $n$  — целое число, то уравнение первого приближения (18.20) вырождается в следующее:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta, \quad (18.22)$$

из которого находим:

$$\tau = \xi = \varepsilon \Delta \varphi + \text{const},$$

**T<sub>s</sub> θ<sub>s</sub>**

$$\nu t - \frac{p}{q} \varphi = \left( \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} \right) \varphi + \text{const},$$

или

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (18.23)$$

и, следовательно, в первом приближении

$$x = z(\omega t + \varphi_0). \quad (18.24)$$

Итак, в случае, если  $\frac{p}{q} \neq n$ , мы получаем для вынужденных колебаний в первом приближении такое же выражение, как и для свободных колебаний, когда внешняя сила  $\varepsilon E \cos \nu t$  на систему не воздействует.

Таким образом, в первом приближении влияние малой внешней силы на форму и частоту колебаний оказывается пренебрежимым в случае, когда ее частота не является достаточно близкой к одному из обертонов собственной частоты.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\frac{p}{q}$  равно некоторому целому числу  $m$ , что соответствует субгармоническому резонансу  $\omega \approx \frac{\nu}{m}$ .

Из уравнения (18.20) находим:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\nu}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \theta_m). \quad (18.25)$$

Полученное уравнение значительно проще, чем соответствующие уравнения первого приближения (14.39) для системы, рассмотренной в § 14 настоящей главы, где мы получили систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных — амплитуды и полной фазы колебания. В рассматриваемом случае релаксационных колебаний имеем лишь одно дифференциальное уравнение относительно фазового угла  $\xi$ , которое к тому же интегрируется в квадратурах.

Характер решений уравнения (18.25) можно обнаружить и непосредственно, не производя предварительно его интегрирования.

Пусть, например,

$$\left| \frac{\nu}{\omega} - m \right| < \left| \frac{\varepsilon m A_m}{2} \right|. \quad (18.26)$$

Тогда производная  $\frac{d\xi}{d\varphi}$  будет знакопеременной функцией  $\xi$  вида, изображенного на рис. 108.

Таким образом, очевидно, существуют постоянные решения  $\xi_i$ , являющиеся корнями уравнения

$$F(\xi) = \frac{\nu}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \theta_m) = 0. \quad (18.27)$$

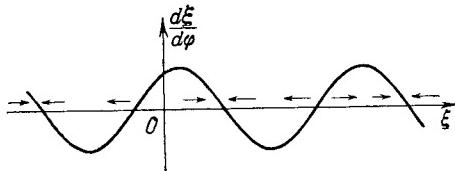


Рис. 108.

При этом те из решений, для которых

$$F'(\xi) = \frac{\varepsilon m A_m}{2} \sin(\xi - \vartheta_m) > 0,$$

неустойчивы, а те решения, для которых

$$F'(\xi) = \frac{\varepsilon m A_m}{2} \sin(\xi - \vartheta_m) < 0,$$

устойчивы.

Так как в рассматриваемом случае  $\xi = \tau = \nu t - m\phi$ , имеем:

$$x = z \left[ \frac{\nu t - \xi}{m} \right], \quad (18.28)$$

откуда очевидно, что вынужденные релаксационные колебания с течением времени приближаются к установившимся периодическим колебаниям, соответствующим различным корням уравнения (18.27) и совершающимся с частотой, точно равной субгармонике  $\frac{\nu}{m}$  частоты  $\nu$  внешней силы.

Таким образом, для значений частоты  $\nu$ , лежащей внутри резонансной полосы, определенной неравенством (18.26):

$$m - \left| \frac{\varepsilon m A_m}{2} \right| < \frac{\nu}{\omega} < m + \left| \frac{\varepsilon m A_m}{2} \right|, \quad (18.29)$$

имеет место явление синхронизации.

Ширина резонансной зоны в первом приближении

$$|\varepsilon m A_m|,$$

как видно, пропорциональна амплитуде внешней силы.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\nu$  лежит вне резонансной зоны и, следовательно:

$$\left| \frac{\nu}{\omega} - m \right| > \left| \frac{\varepsilon m A_m}{2} \right|. \quad (18.30)$$

В этом случае согласно уравнению (18.25) очевидно, что производная  $\frac{d\xi}{d\phi}$  имеет постоянный знак, равный знаку разности  $\frac{\nu}{\omega} - m$ .

Интегрируя уравнения (18.25), получаем:

$$\varphi = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\frac{\nu}{\omega} - m - \frac{\varepsilon m A_m}{2} \cos(\xi - \vartheta_m)} + \text{const},$$

откуда находим:

$$\varphi = \frac{\xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} f(\xi) + \vartheta_0, \quad (18.31)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{\nu}{\omega} - m \right) \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 m^2 A_m^2}{4 \left( m - \frac{\nu}{\omega} \right)^2}}, \quad (18.32)$$

$\vartheta_0$  — произвольная постоянная,  $f(\xi)$  — периодическая функция  $\xi$  с периодом  $2\pi$ :

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos\left(\frac{\xi - \vartheta_m - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\xi - \vartheta_m + \beta}{2}\right)}. \quad (18.33)$$

Здесь

$$\beta = \arccos \frac{\epsilon m A_m}{2 \left( m - \frac{v}{\omega} \right)}, \quad 0 < \beta < \pi.$$

Обращая (18.31), получим:

$$\xi = \alpha (\varphi - \vartheta_0) + F \{ \alpha (\varphi - \vartheta_0) \}, \quad (18.34)$$

где  $F(\vartheta)$  — периодическая функция  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ .

Замечая, что в принятом приближении

$$\xi = \tau = vt - m\varphi,$$

из (18.34) имеем:

$$vt = m\varphi + \alpha (\varphi - \vartheta_0) + F \{ \alpha (\varphi - \vartheta_0) \}. \quad (18.35)$$

Положим

$$\alpha (\varphi - \vartheta_0) = \theta;$$

тогда

$$\varphi = \vartheta_0 + \frac{\theta}{\alpha} \quad (18.36)$$

и

$$(m + \alpha) \theta + \alpha F(\theta) = \alpha (vt - m\vartheta_0),$$

откуда, решая это уравнение относительно  $\theta$ , находим:

$$\theta = \frac{\alpha (vt - m\vartheta_0)}{m + \alpha} + \alpha \sigma \left\{ \frac{\alpha (vt - m\vartheta_0)}{m + \alpha} \right\}, \quad (18.37)$$

где  $\sigma(\theta)$  — периодическая функция  $\theta$  с периодом  $2\pi$ .

Подставляя значения  $\theta$  (18.37) в правую часть (18.31), получаем:

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_1 + \sigma [m(\Omega_s - \Omega_p)t - m\varphi_1], \quad (18.38)$$

где обозначено:

$$\Omega_p = \frac{v}{m + \alpha}, \quad \Omega_s = \frac{v}{m}.$$

$$\varphi_1 = \frac{\vartheta_0 \alpha}{m + \alpha} = \text{const.}$$

Подставляя (18.38) в (18.28), находим окончательно приближенное выражение для вынужденных релаксационных колебаний в виде

$$x = z \{ \Omega_p t + \varphi_1 + \sigma [m(\Omega_s - \Omega_p)t - m\varphi_1] \}. \quad (18.39)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае колебания являются кратно периодическими и совершаются с двумя основными частотами — с частотой  $\Omega_p$ , которую можно было бы назвать измененной собственной частотой, так как  $\Omega_p = \omega$  при  $\epsilon = 0$ , и с частотой биений

$$|m(\Omega_s - \Omega_p)| = \left| \frac{\alpha v}{m + \alpha} \right| \approx \sqrt{(v - m\omega)^2 - \frac{\epsilon^2 m^2 A_n^2}{4}}, \quad (18.40)$$

представляющей разностный тон между частотой внешней силы  $v = m\Omega$ , и  $m$ -м обертоном измененной собственной частоты.

Заметим, что при приближении  $v$  к границе резонансной зоны  $\alpha \rightarrow 0$  а потому стремится к нулю и частота биений.

Кроме того, нетрудно показать, что при удалении от резонанса интенсивность биений, определяемых функцией  $\sigma$ , уменьшается и изменяется

собственная частота  $\Omega_p$  приближается к своему значению  $\omega$ , соответствующему свободным колебаниям.

Перейдем теперь к построению второго приближения. Для этого прежде всего найдем выражение улучшенного первого приближения.

Рассмотрим сначала общий случай произвольного рационального значения отношения  $\frac{p}{q}$ .

Воспользовавшись разложением Фурье (18.21), получаем для коэффициента при первой степени  $\varepsilon$  в правой части уравнения (18.20) выражение

$$\Delta - \frac{p}{q\omega} \frac{\cos(\tau + \frac{p}{q}\varphi)}{z'(\varphi)} = \Delta - \frac{p}{q} A_0 \cos\left(\tau + \frac{p}{q}\varphi\right) - \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \left\{ \cos\left[\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \tau + \vartheta_n\right] + \cos\left[\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \tau + \vartheta_n\right] \right\}.$$

Поэтому улучшенное первое приближение будет иметь следующий вид:

$$\tau = \xi + \varepsilon u(\varphi, \xi), \quad (18.41)$$

где

$$u(\varphi, \xi) = -A_0 \sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) - \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin\left\{\left(n + \frac{p}{q}\right)\varphi + \xi + \vartheta_n\right\}}{n + \frac{p}{q}} - \frac{p}{q} \sum_{\substack{n \neq \frac{p}{q} \\ (n \neq 0)}} \frac{A_n}{2} \frac{\sin\left\{\left(n - \frac{p}{q}\right)\varphi - \xi + \vartheta_n\right\}}{n - \frac{p}{q}}. \quad (18.42)$$

Подставляя значение  $\tau$  (18.41) в уравнение (18.20) и усредняя по  $\varphi$ , получим уравнение второго приближения:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon & \left\{ \Delta - \frac{p}{q} M \left[ \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} \right] \right\} + \varepsilon^2 M \left[ \frac{p}{q} \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) + \right. \\ & \left. + \frac{p}{q} \frac{\cos^2\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} - \frac{\Delta}{\omega} \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{z'(\varphi)} \right]. \end{aligned} \quad (18.43)$$

Рассмотрим сначала перезонансный случай, когда отношение  $\frac{p}{q}$  не равно ни целому, ни половине целого числа, и следовательно, когда частота внешней силы не лежит вблизи обертонов собственной частоты —  $n\omega$  и ее половины —  $\frac{n\omega}{2}$ .

Заметим, что в принятом перезонанском случае для любых целых  $n$  и  $m$  имеем неравенства

$$n \neq \frac{p}{q}, \quad n + \frac{p}{q} \neq m - \frac{p}{q}.$$

Далее, на основании (18.21) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} &= A_0 \cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left\{ \cos \left[ \left( n + \frac{p}{q} \right) \varphi + \xi + \vartheta_n \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[ \left( n - \frac{p}{q} \right) \varphi - \xi + \vartheta_n \right] \right\}, \\ \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} &= A_0 \sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} A_n \left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{p}{q} \right) \varphi + \xi + \vartheta_n \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left[ \left( n - \frac{p}{q} \right) \varphi - \xi + \vartheta_n \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.44)$$

Поэтому, учитывая (18.42) и (18.44), можем написать:

$$\begin{aligned} M \left\{ \frac{\cos\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} \right\}_\varphi &= 0, \\ M \left\{ \frac{\cos^2\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\}_\varphi &= \frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{4} \sum_{n \neq 0} A_n^2, \\ M \left\{ \frac{\sin\left(\xi + \frac{p}{q}\varphi\right)}{\omega z'(\varphi)} u(\varphi, \xi) \right\}_\varphi &= -\frac{A_0^2}{2} + \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n^2}{8} \left[ \frac{1}{n - \frac{p}{q}} - \frac{1}{n + \frac{p}{q}} \right]. \end{aligned}$$

После этого уравнение второго приближения (18.43) принимает следующий вид:

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \varepsilon \Delta + \varepsilon^2 \gamma = \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma, \quad (18.45)$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{p}{q} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n^2}{4} \frac{n^2}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}}. \quad (18.46)$$

Интегрируя уравнение (18.45), находим:

$$\xi = \left[ \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \varphi + \xi_0,$$

где  $\xi_0$  — произвольная постоянная. Принимая во внимание (18.41), получаем следующую формулу второго приближения:

$$\tau = \nu t - \frac{p}{q} \varphi = \left[ \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \varphi + \xi_0 + \varepsilon u \left[ \varphi, \left( \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right) \varphi + \xi_0 \right],$$

из которой с точностью до величин второго порядка малости включительно получаем:

$$\varphi = \frac{\nu t - \xi_0}{\frac{\nu}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma} - \frac{\omega}{\nu} \varepsilon u \left\{ \frac{\nu t - \xi_0}{\frac{\nu}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma}, \left[ \frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q} + \varepsilon^2 \gamma \right] \frac{\nu t - \xi_0}{\frac{\nu}{\omega} + \varepsilon^2 \gamma} + \xi_0 \right\}. \quad (18.47)$$

Полагая здесь:

$$\Omega_p = \frac{\omega}{1 + \varepsilon^2 \gamma \frac{\omega}{\nu}}, \quad \varphi_0 = -\Omega_p \frac{\xi_0}{\nu}, \quad (18.48)$$

имеем:

$$\varphi = \Omega_p t + \varphi_0 - \varepsilon u \left\{ \Omega_p t + \varphi_0, \left( \nu - \frac{p}{q} \Omega_p \right) t - \frac{p}{q} \varphi_0 \right\} \frac{\omega}{\nu}. \quad (18.49)$$

Итак, в нерезонансном случае получаем следующие выражения второго приближения для вынужденных релаксационных колебаний:

$$\begin{aligned} x &= z(\varphi), \\ \varphi &= \Omega_p t + \varphi_0 + \frac{p\omega}{q\nu} \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n}{2 \left( n + \frac{p}{q} \right)} \sin [n(\Omega_p t + \varphi_0) + \nu t + \vartheta_n] + \\ &+ \frac{p\omega}{q\nu} \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n}{2 \left( n - \frac{p}{q} \right)} \sin [n(\Omega_p t + \varphi_0) - \nu t + \vartheta_n] + \varepsilon A_0 \sin \nu t, \end{aligned} \quad (18.50)$$

где согласно (18.48) с принятой нами степенью точности

$$\Omega_p = \omega - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon^2 A_n^2}{4} \frac{n^2 \omega}{n^2 - \frac{p^2}{q^2}}. \quad (18.51)$$

Из полученных формул второго приближения нетрудно исключить вспомогательную величину — отношение  $\frac{p}{q}$ . Так как разность  $\frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q}$  первого порядка малости, то формулы (18.50) верны с точностью до величин второго, а формула (18.51) до величин третьего порядка малости. С такой же степенью точности можем написать:

$$\begin{aligned} x &= z(\varphi), \\ \varphi &= \Omega_p t + \varphi_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n \omega}{2(n\omega + \nu)} \sin \{n(\Omega_p t + \varphi_0) + \nu t + \vartheta_n\} + \\ &+ \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon A_n \omega}{2(n\omega - \nu)} \sin \{n(\Omega_p t + \varphi_0) - \nu t + \vartheta_n\} + \varepsilon A_0 \sin \nu t, \\ \Omega_p &= \omega - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon^2 A_n^2}{8} \left[ \frac{n\omega}{n\omega - \nu} + \frac{n\omega}{n\omega + \nu} \right]. \end{aligned} \quad (18.52)$$

Найденное решение соответствует асинхронному режиму колебаний. Здесь колебания будут квазипериодическими с двумя основными частотами  $\nu$  и  $\Omega_p$ .

Изменение фазового угла  $\varphi$  представляется здесь как вращение с постоянной угловой скоростью, равной  $\Omega_p$ , на которое налагаются колебания с малой амплитудой, с частотами  $\nu$ ,  $n\Omega_p - \nu$ ,  $n\Omega_p + \nu$ .

Перейдем теперь к построению второго приближения в резонансном случае.

Для исследования резонансного случая следует взять отношение  $\frac{p}{q}$  равным целому или половине целого числа. Если положим  $\frac{p}{q} = m$ , то в качестве уравнения второго приближения получим уравнение, отличающееся от (18.25) на члены второго порядка малости. С помощью этого уравнения мы можем уточнить положение и ширину резонансной зоны, уточнить значение измененной собственной частоты асинхронных колебаний и т. д.

Не останавливаясь на этом, рассмотрим случай, когда отношение  $\frac{p}{q}$  является половиной целого числа:

$$\frac{p}{q} = \frac{2m+1}{2}.$$

Для раскрытия операции усреднения в уравнении второго приближения (18.43) заметим, что согласно (18.42) имеем:

$$\begin{aligned} u(\varphi, \xi) = & -A_0 \sin\left(\xi + \frac{2m+1}{2}\varphi\right) - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{2m+1}{2}\right)\varphi + \xi + \vartheta_n\right]}{n + \frac{2m+1}{2}} - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{2} \frac{\sin\left[\left(n - \frac{2m+1}{2}\right)\varphi - \xi + \vartheta_n\right]}{n - \frac{2m+1}{2}} ; \quad (18.53) \end{aligned}$$

подставляя значение (18.53) в правую часть уравнения (18.43), после ряда выкладок находим:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\gamma}{\omega} - \frac{2m+1}{2} + \varepsilon^2 \gamma - \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \cos(2\xi + \psi_m), \quad (18.54)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} S_m \sin \psi_m &= M \left\{ \frac{\sin(2m+1)\varphi}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\}, \\ S_m \cos \psi_m &= -M \left\{ \frac{\cos(2m+1)\varphi}{[\omega z'(\varphi)]^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18.55)$$

Полученное уравнение (18.54) отличается от уравнения (18.45) для нерезонансного случая наличием слагаемого

$$\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \cos(2\xi - \psi_m).$$

Так же как и в случае первого приближения, нетрудно видеть, что резонансная зона определяется неравенством

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{\gamma}{\omega} - \frac{2m+1}{2} + \varepsilon^2 \gamma < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m \quad (18.56)$$

или, вводя измененную собственную частоту  $\Omega_p$  с той же степенью точности, неравенством

$$-\varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m < \frac{\nu}{\Omega_p} - \frac{2m+1}{2} < \varepsilon^2 \frac{2m+1}{4} S_m. \quad (18.57)$$

Итак, рассматривая первое приближение, мы нашли резонансные зоны только для  $\nu$ , лежащих в окрестности  $m\omega$ , причем ширина их оказалась пропорциональной первой степени  $\varepsilon$ ; во втором приближении обнаруживаются дополнительные резонансные зоны для  $\nu$ , лежащих в окрестности  $\frac{2m+1}{2}\omega$ , и ширина этих «вторичных» зон пропорциональна квадрату  $\varepsilon$ .

Анализ высших приближений указал бы также на наличие резонансных зон для  $\nu \approx \frac{p}{q}\omega$ ,  $q = 3, 4, \dots$  с шириной порядка  $\varepsilon^q$ .

### § 19. Воздействие «периодических» сил на нелинейные системы с медленно меняющимися параметрами

Перейдем теперь к рассмотрению воздействия внешних «периодических» сил на нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами, причем будем предполагать, что «частоты» внешних сил в свою очередь также медленно изменяются со временем (медленно в смысле, указанном нами в § 8).

Итак, рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x = \varepsilon F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (19.1)$$

в котором, как и везде,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\tau = \varepsilon t$  — «медленное» время,  $F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right)$  — функция периодическая по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , которая может быть представлена в виде

$$F \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} F_n \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (19.2)$$

причем коэффициенты  $F_n \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$  этой конечной суммы в свою очередь являются некоторыми полиномами  $x, \frac{dx}{dt}$ . Коэффициенты этих полиномов зависят от  $\tau$ . Будем предполагать, кроме того, что  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ , т. е. мгновенная частота внешней периодической силы тоже медленно изменяется со временем. Для возможности применения асимптотического метода к построению приближенных решений уравнения (19.1) предложим, как и в § 8, что коэффициенты уравнения (19.1)  $m(\tau)$ ,  $k(\tau)$ , а также  $F_n \left( \tau, x, \frac{dx}{dt} \right)$  и  $\nu(\tau)$  имеют достаточное число производных по  $\tau$  для всех конечных значений  $\tau$  и, кроме того, для любых  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$   $m(\tau)$  и  $k(\tau)$  строго положительны.

При этих предположениях построим приближенные решения для уравнения (19.1) в самом общем виде, пригодные для исследования как резонансной зоны, так и подходов к ней из нерезонансной зоны, причем для случая любого демультиплексационного резонанса.

К правильному выбору структуры асимптотического решения уравнения (19.1) приходим, как и в предыдущих параграфах, из тех же физических соображений.

При отсутствии возмущения ( $\varepsilon = 0$ ) и при постоянном  $\tau$  решение уравнения (19.1) будет выражаться синусоидой с постоянными амплитудой и фазой колебания, определяемыми начальными значениями.

При наличии возмущения в решении могут появиться обертоны, гармоники комбинационных частот; могут возникнуть различные резонансы и другие явления, о которых мы уже говорили выше (§§ 1 и 13). Наличие же медленно меняющегося времени  $\tau$  (медленная изменяемость массы системы, коэффициента упругости, частоты внешней периодической силы и других параметров) также вызывает в системе ряд дополнительных явлений, не наблюдаемых в колебательных системах, описываемых уравнением (13.1). Так, например, как указывалось в § 8, здесь уже теряет смысл общепринятое понятие собственной частоты системы, так как в данном случае «собственная частота»  $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$  будет также медленно изменяться со временем, зависимость мгновенной частоты внешней силы  $v(\tau)$  от времени будет влиять на величину амплитуды колебаний и т. д.

Принимая во внимание все эти физические соображения, естественно, учитывая структуру асимптотических решений для уравнений (8.1) и (13.1), приближенное решение уравнения (19.1) искать в виде ряда

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \varepsilon u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \\ + \varepsilon^2 u_2\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots, \quad (19.3)$$

в котором  $u_1\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)$ ,  $u_2\left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta\right)$ , ... — периодические функции углов  $\theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta$  с периодом  $2\pi$ ;  $p$  и  $q$ , как и выше, — некоторые небольшие взаимно простые числа, выбор которых зависит от того, какой резонанс мы собираемся исследовать, а величины  $a$  и  $\vartheta$  — функции времени, определяющиеся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (19.4)$$

где  $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{k(\tau)}{m(\tau)}}$  — «собственная» частота системы,  $\frac{d\theta}{d\tau} = v(\tau)$  — мгновенная частота внешнего периодического возмущения,  $\tau = \varepsilon t$ , а разность  $\omega(\tau) - \frac{p}{q} v(\tau)$  может изменяться в процессе колебания.

Для определения функций, стоящих в правых частях выражений (19.3) и (19.4), мы можем, как и обычно, найти, исходя из (19.3), выражения для  $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$  с учетом, разумеется, уравнений (19.4), полученные выражения подставить в уравнение (19.1), приравнять коэффициенты при оди-

наковых степенях  $\varepsilon$ , после чего найти выражения для  $u_1(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta)$ ,  $u_2(\tau, a, \theta, \frac{p}{q}\theta + \vartheta)$ , ..., а также, учитывая дополнительные условия типа (1.8), выражения для  $A_1(\tau, a, \vartheta)$ ,  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ ,  $A_2(\tau, a, \vartheta)$ ,  $B_2(\tau, a, \vartheta)$ , ...

Можно эти функции найти и проще, воспользовавшись уравнениями гармонического баланса, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{2\pi q} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x - \right. \\ & \left. - \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) \right\}_{x=a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots} \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) d\theta = 0, \\ & \int_0^{2\pi q} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + k(\tau) x - \right. \\ & \left. - \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) \right\}_{x=a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) + \dots} \sin\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right) d\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

Подставляя в подынтегральные выражения значения  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , найденные из (19.3) с точностью до величин первого порядка малости с учетом того, что  $a$  и  $\vartheta$  являются функциями времени, удовлетворяющими уравнениям (19.4), и, произведя интегрирование, получаем уравнения типа (14.34) для функций  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ .

Учитывая при подстановке  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  также величины, пропорциональные  $\varepsilon^2$ , получим уравнения, определяющие  $A_2(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_2(\tau, a, \vartheta)$ .

После этих элементарных выкладок находим приближенные решения для уравнения (19.1).

В первом приближении решение уравнения (19.1) будет иметь вид

$$x = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta + \vartheta\right), \quad (19.6)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

в которой  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$  — периодические по  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$  частные решения системы

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \omega(\tau) - \frac{p}{q} v(\tau) \right] \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a v(\tau) B_1 = \\ & = \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \theta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\ & \left[ \omega(\tau) - \frac{p}{q} v(\tau) \right] a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega(\tau) A_1 = - \frac{1}{m(\tau)} \frac{d[m(\tau) \omega(\tau)]}{d\tau} - \\ & - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \theta'} \sin \psi d\theta d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

В этой системе, как обычно, введено обозначение

$$F_0(\tau, a, \theta, \psi) = F(\tau, \theta, a \cos \psi, -a\omega(\tau) \sin \psi), \quad \sqrt{\vartheta'} = \psi - \frac{p}{q} \theta.$$

Во втором приближении имеем:

$$x = a \cos \left( \frac{p}{q} \theta + \vartheta \right) + \varepsilon u_1 \left( \tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \vartheta \right), \quad (19.9)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  — решения следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

Здесь  $u_1 \left( \tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \vartheta \right)$  определяется формулой

$$u_1 \left( \tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \vartheta \right) = \frac{1}{4\pi^2 m(\tau)} \sum_{n, m} \frac{e^{i[n\theta + m \left( \frac{p}{q} \theta + \vartheta \right)]}}{\omega^2(\tau) - (n\omega(\tau) + n\nu(\tau))^2} \times \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi, \quad (19.11)$$

в которой суммирование выполняется для значений  $n, m$ , удовлетворяющих условию  $nq + p(m + 1) \neq 0$ . В этом случае в правой части выражения (19.11) отсутствуют члены, знаменатели которых могут обращаться в нуль для любых  $\tau$  в интервале  $0 \leq \tau \leq L$ .  $A_2(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_2(\tau, a, \vartheta)$  определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) \right] \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega(\tau) B_2 &= \\ = - \left[ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m(\tau)} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \theta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\ \left[ \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) \right] a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\nu(\tau) A_2 &= \\ = - \left[ \frac{\partial B_1}{\partial a} aA_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} aB_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \tau} a + 2A_1 B_1 + \frac{dm(\tau)}{d\tau} \frac{aB_1}{m(\tau)} \right] - \\ - \frac{1}{2\pi^2 m(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \theta'} \sin \psi d\theta d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

где  $F_1(\tau, a, \theta, \psi)$  — функция, периодическая по  $\theta$  и  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , явное выражение для которой становится известным, как только будет найдено выражение для  $u_1(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $\psi = \frac{p}{q} \theta + \vartheta$ ).

Заметим так же, как и в § 8, что полученные здесь уравнения, определяющие  $a$  и  $\vartheta$  в общем случае, не могут быть проинтегрированы в замкнутом виде, и поэтому приходится пользоваться численными методами интегрирования или ограничиваться исследованиями качественного характера; численное интегрирование уравнений типа (19.4) во много раз проще, чем численное интегрирование непосредственно уравнения (19.1), как об этом уже говорилось.

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев уравнения (19.1).

В качестве первого частного случая рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний нелинейного вибратора, находящегося под воздействием синусоидальной силы, амплитуда и мгновенная частота которой медленно изменяются. В этом случае имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta, \quad (19.13)$$

где  $\frac{dx}{dt} = v(\tau)$ ,  $\tau = \varepsilon t$ ,  $m$  и  $k$  — постоянные.

Колебательные системы, описываемые уравнением такого типа, играют значительную роль в машиностроении, электротехнике и т. д.

Как указывалось выше (см. § 13), в таких системах в первом приближении возможно обнаружить только основной резонанс, поэтому мы сейчас остановимся на составлении уравнений первого приближения для случая основного резонанса  $p = 1$ ,  $q = 1$ . Для вывода уравнений первого приближения воспользуемся уравнениями гармонического баланса.

В первом приближении для случая основного резонанса решение уравнения (19.13) ищем в виде

$$x = a \cos(\theta + \vartheta), \quad (19.14)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из уравнений первого приближения

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

в которых

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{const.}$$

Определим  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ . Для этого находим (с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  включительно)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos(\theta + \vartheta) - a \sin(\theta + \vartheta) \frac{d(\theta + \vartheta)}{dt} = \\ &= \varepsilon A_1 \cos(\theta + \vartheta) - a\omega \sin(\theta + \vartheta) - \varepsilon aB_1 \sin(\theta + \vartheta), \end{aligned} \quad (19.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon \left[ (\omega - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos(\theta + \vartheta) - a\omega^2 \cos(\theta + \vartheta) - \\ &\quad - \varepsilon \left[ (\omega - v(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin(\theta + \vartheta). \end{aligned} \quad (19.17)$$

Подставляя (19.17) и (19.14) в левую часть уравнения (19.13), имеем:

$$\left\{ m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right\}_{x=a \cos(\theta+\vartheta)} = \varepsilon m \left[ (\omega - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos(\theta + \vartheta) - \varepsilon m \left[ (\omega - v(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin(\theta + \vartheta), \quad (19.18)$$

так как

$$m\omega^2 = k.$$

Мы здесь не учитываем член  $\varepsilon k u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ , так как он не содержит первой гармоники и при интегрировании пропадает.

Правую часть уравнения (19.13), учитывая (19.14) и (19.16), можем представить с точностью до величины порядка  $\varepsilon$  в виде

$$\left\{ \varepsilon f\left( x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta \right\}_{x=a \cos(\theta+\vartheta)} = \\ = \varepsilon f(a \cos(\theta+\vartheta), -a\omega \sin(\theta+\vartheta)) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta,$$

или

$$\left\{ \varepsilon f\left( x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon E(\tau) \sin \theta \right\}_{x=a \cos(\theta+\vartheta)} = \\ = \frac{\varepsilon \cos(\theta+\vartheta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi + \\ + \frac{\varepsilon \sin(\theta+\vartheta)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi + \varepsilon \sum_{n \neq 1} \{ f_n^{(1)}(a) \cos n(\theta+\vartheta) + \\ + f_n^{(2)}(a) \sin n(\theta+\vartheta) \} + \varepsilon E(\tau) [\cos \vartheta \sin(\theta+\vartheta) - \sin \vartheta \cos(\theta+\vartheta)], \quad (19.19)$$

где

$$f_n^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi d\psi, \\ f_n^{(2)}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi d\psi,$$

причем

$$f_0(a, \psi) = f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и одинаковых гармониках (соответственно при синусах и косинусах) в правых частях выражений (19.18) и (19.19), находим систему уравнений, определяющую  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ :

$$\left. \begin{aligned} m \left[ (\omega - v(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi - E(\tau) \sin \vartheta, \\ m \left[ (m - v(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - E(\tau) \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19.20)$$

из которой без затруднений находим:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{E(\tau)}{m[\omega + v(\tau)]} \cos \vartheta, \\ B_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi m\omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{E(\tau)}{ma[\omega + v(\tau)]} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (19.21)$$

После этого уравнения первого приближения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon}{2\pi m \omega} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\epsilon E(\tau)}{m [\omega + v(\tau)]} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - v(\tau) - \frac{\epsilon}{2\pi m \omega a} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\epsilon E(\tau)}{ma [\omega + v(\tau)]} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Воспользовавшись обозначениями (15.5) (см. § 15), систему (19.22) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\dot{\omega}_e(a) a - \frac{\epsilon E(\tau)}{m [\omega + v(\tau)]} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e(a) - v(\tau) + \frac{\epsilon E(\tau)}{ma [\omega + v(\tau)]} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

где  $\dot{\omega}_e(a)$  и  $\omega_e(a)$  являются соответственно эквивалентным декрементом затухания и эквивалентной частотой для нелинейной колебательной системы, описываемой уравнением (15.6).

Для нашего случая  $\epsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$  мы можем найти либо воспользовавшись формулой (19.11), либо непосредственно как вынужденные колебания, возбуждаемые в исследуемой системе высшими гармониками, находящимися в правой части выражения (19.19), т. е. суммой

$$\epsilon \sum_{n \neq 1} \{ f_n^{(1)}(a) \cos n(\theta + \vartheta) + f_n^{(2)}(a) \sin n(\theta + \vartheta) \}.$$

Явное выражение для  $\epsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$  будет:

$$\begin{aligned} \epsilon u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) &= \frac{1}{\pi \omega^2} \sum_{n \neq 1} \frac{1}{1-n^2} \left[ \cos n(\theta + \vartheta) \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos n\psi d\psi + \right. \\ &\quad \left. + \sin n(\theta + \vartheta) \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin n\psi d\psi \right]. \end{aligned} \quad (19.24)$$

причем оно не зависит от медленного времени  $\tau$  и совпадает со вторым слагаемым в правой части (15.4).

Выражений для  $A_2(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_2(\tau, a, \vartheta)$  мы здесь находить не будем; заметим только, что для их определения, после того как мы нашли явное выражение для  $u_1(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ , проще всего опять воспользоваться уравнениями гармонического баланса, однако все выкладки вести уже с точностью до величин второго порядка малости включительно.

В качестве второго частного случая рассмотрим весьма распространенное в технике уравнение Маттье в случае, если частота модуляции медленно изменяется со временем. Имеем уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(1 - h \cos \theta)x = 0, \quad (19.25)$$

где  $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau)$ ,  $\tau = \epsilon t$ ,  $\omega$  и  $h$  — постоянные, причем  $h \ll 1$ . Обозначая  $h = \epsilon h_1$ , можем уравнение (19.25) представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon \omega^2 h_1 x \cos \theta. \quad (19.26)$$

Как указывалось выше, для уравнения (19.25) уже в первом приближении можно рассматривать демультиплексионный резонанс. Поэтому

построим асимптотическое решение в первом приближении для случая  $p = 1$ ,  $q = 2$ , воспользовавшись, как и в предыдущем случае, уравнениями гармонического баланса.

Итак, решение уравнения (19.25) ищем в виде

$$x = a \cos\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right), \quad (19.27)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{1}{2} v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (19.28)$$

Определим  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ . Для этого, подставляя (19.27) с учетом соотношений (19.28) в левую часть уравнения (19.26), имеем с точностью до величин первого порядка малости:

$$\left\{ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \right\}_{x=a \cos\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right)} = \varepsilon \left[ \left( \omega - \frac{1}{2} v(\tau) \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 \right] \cos\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right) - \varepsilon \left[ \left( \omega - \frac{1}{2} v(\tau) \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 \right] \sin\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right). \quad (19.29)$$

Правую часть уравнения (19.26) можем представить в виде:

$$\left\{ \varepsilon \omega^2 h_1 x \cos \theta \right\}_{x=a \cos\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right)} = \frac{\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 2\vartheta a \cos\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right) + \frac{\varepsilon \omega^2 h_1}{2} \sin 2\vartheta a \sin\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right) + \frac{a \varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 3\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right) \cos 2\vartheta + \frac{a \varepsilon \omega^2 h_1}{2} \sin 3\left(\frac{1}{2}\theta + \vartheta\right) \sin 2\vartheta. \quad (19.30)$$

Приравнивая коэффициенты при первой гармонике в правых частях (19.29) и (19.30), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left( \omega - \frac{1}{2} v(\tau) \right) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 &= \frac{a \varepsilon \omega^2 h_1}{2} \cos 2\vartheta, \\ \left( \omega - \frac{1}{2} v(\tau) \right) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 &= -\frac{a \varepsilon \omega^2 h_1}{2} \sin 2\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19.31)$$

из которой находим:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{ah_1\omega^2}{2v(\tau)} \sin 2\vartheta, \\ B_1(\tau, a, \vartheta) &= -\frac{h_1\omega^2}{2v(\tau)} \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (19.32)$$

И, следовательно, уравнениями первого приближения, определяющими  $a$  и  $\vartheta$ , в рассматриваемом случае будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{ah\omega^2}{2v(\tau)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega - \frac{v(\tau)}{2} - \frac{h\omega^2}{2v(\tau)} \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Остановимся теперь на применении полученных формул к исследованию колебательных процессов в конкретных системах с медленно меняющимися параметрами, в частности, рассмотрим явления, происходящие в колебательной системе при прохождении через резонанс. Для того, чтобы легче было сопоставить полученные результаты с изученным стационарным режимом, рассмотрим, как и в § 15, нелинейный вибратор с жесткой характеристикой нелинейной восстанавливающей силы ( $F = cx + dx^3$ ,  $d > 0$ ), находящийся под воздействием внешней синусоидальной силы с постоянной амплитудой и медленно изменяющейся частотой. Пусть колебания этого вибратора описываются следующим уравнением:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx + dx^3 = E \sin \theta, \quad (19.34)$$

где  $x$  — координата, определяющая положение системы,  $t$  — время,  $m$  — масса,  $b$  — коэффициент сопротивления,  $F = cx + dx^3$  — нелинейная восстанавливающая упругая сила,  $E$  — амплитуда возмущающей силы,  $\theta$  — некоторая функция времени. Введем, как и выше, для упрощения выкладок безразмерные  $x_1$  и  $t_1$  по формулам:

$$x_1 = \sqrt{\frac{d}{c}} x, \quad t_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} t; \quad (19.35)$$

тогда уравнение (19.34) запишется в виде

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + \delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1 + x_1^3 = E_1 \sin \theta, \quad (19.36)$$

где введены обозначения:

$$\delta = \frac{b}{\sqrt{mc}}, \quad E_1 = \frac{E}{\sqrt{c/m}} \sqrt{\frac{d}{c}}.$$

Предположим, что трение, амплитуда внешней силы, а также член, характеризующий нелинейность, достаточно малы по сравнению с собственной частотой системы, т. е. система близка к линейной консервативной, и положим

$$-\left[ \delta \frac{dx_1}{dt_1} + x_1^3 \right] = \dot{\varepsilon} f \left( x_1, \frac{dx_1}{dt} \right). \quad (19.37)$$

Тогда согласно (15.5) находим:

$$\delta_e(a) = -\frac{\delta}{2}, \quad k_e(a) = 1 + \frac{3a^2}{8},$$

после чего, воспользовавшись (19.14) и (19.23), в первом приближении получим:

$$x_1 = a \cos(\theta + \vartheta),$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\delta a}{2} - \frac{E_1}{1 + \nu(\tau)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 1 - \nu(\tau) + \frac{3a^2}{8} + \frac{E_1}{a[1 + \nu(\tau)]} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (19.38)$$

при этом  $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$  — некоторая функция времени, характеризующая закон изменения со временем мгновенной частоты внешней силы.

В § 15 подробно исследован стационарный режим колебательных систем, описываемых уравнением типа (19.34); построены резонансные кривые; исследована устойчивость различных ветвей этих кривых; рассмотрены гистерезисные явления, возникающие в связи с нелинейностью.

Здесь мы рассмотрим поведение кривых зависимости амплитуды колебания от частоты внешней силы при медленном изменении частоты со временем, причем допустим, что в процессе своего изменения частота внешней силы проходит через резонансные значения \*). Для того чтобы построить резонансные кривые при прохождении через резонанс, необходимо систему уравнений первого приближения (19.38) численно проинтегрировать при помощи какого-либо метода численного интегрирования. Для исследуемых уравнений (19.38) удобным является метод численного интегрирования, разработанный А. Н. Крыловым. Заметим, что нет необходимости численно интегрировать уравнения (19.38) для всего промежутка времени, в течение которого изменяется частота внешней силы. Для получения полной картины процесса, происходящего при прохождении через резонанс, достаточно проинтегрировать систему (19.38), начиная от того момента времени, когда частота внешней силы достаточно близка к собственной частоте системы, но еще не находится непосредственно в резонансной зоне.

Как показывает практика построения резонансных кривых при прохождении через резонанс для тех значений частоты внешней силы, для которых стационарная резонансная кривая близка к горизонтальной линии, кривые прохождения через резонанс мало отличаются от стационарных резонансных кривых даже при достаточно больших скоростях изменения частоты внешней силы. Кроме того, на характер резонансных кривых при прохождении через резонанс (на величину и положение максимума и т. д.) почти не влияют начальные условия в случае, если они не находятся непосредственно в резонансной зоне (т. е. в зоне частот, где амплитуда резко возрастает). Поэтому для численного интегрирования системы (19.38) в качестве начальных значений целесообразно принимать значения  $a$ ,  $\dot{a}$  и  $v$ , удовлетворяющие стационарному режиму вблизи резонансной зоны, но не в зоне быстрого возрастания амплитуд.

На преимущество интегрирования системы уравнений (19.38) по сравнению с непосредственным интегрированием уравнения (19.34) уже обращалось внимание, и поэтому подробно на этом останавливаться не будем.

Будем рассматривать случай, когда мгновенная частота внешней силы зависит от времени линейно:

$$v(\tau) = v_0 + \beta t; \quad (19.39)$$

при  $\beta > 0$  частота возрастает со временем, при  $\beta < 0$  — убывает. Скорость прохождения через резонанс зависит от значений  $\beta$ . Чем больше по абсолютной величине  $\beta$ , тем скорее система проходит через резонанс.

Численно интегрируя систему уравнений при различных значениях  $\beta$ , получаем ряд кривых прохождения через резонанс, которые приведены на рис. 109, 110, 111. Для сопоставления со стационарным режимом на этих же рисунках приведены стационарные резонансные кривые, построенные согласно формулам § 15.

На рис. 112 и 113 приведены как стационарные резонансные кривые, так и кривые прохождения через резонанс для случая, когда

\*) Этот вопрос подробно рассмотрен в нашей работе [31].

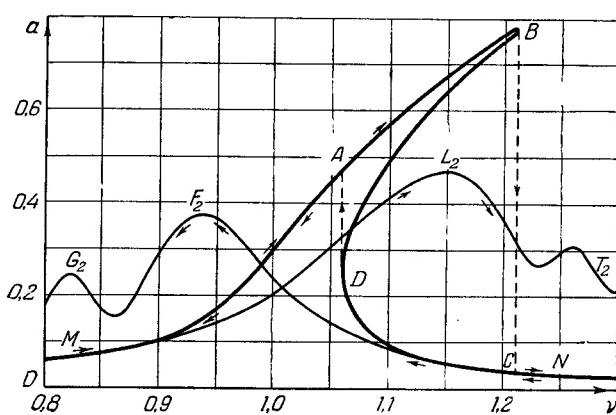


Рис. 109.

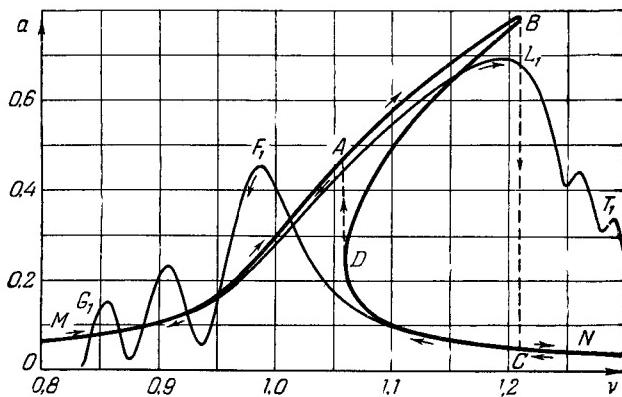


Рис. 110.

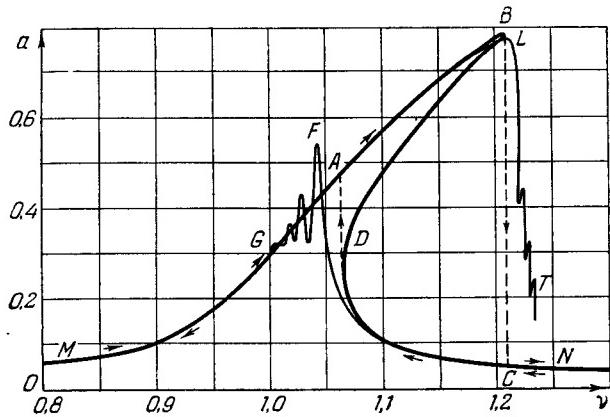


Рис. 111.

характеристика нелинейной восстанавливающей силы имеет вид, приведенный на рис. 114.

Анализ построенных резонансных кривых при прохождении через резонанс позволяет выявить ряд характерных особенностей этого сложного явления, а также влияние на него нелинейности системы. Этот вопрос

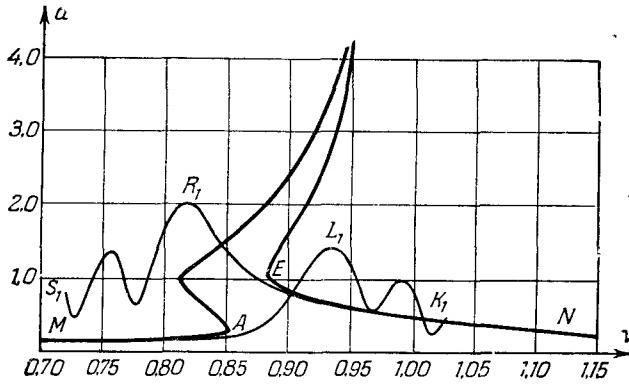


Рис. 112.

подробно рассмотрен в специальной литературе [31], и поэтому мы здесь укажем только на некоторые характерные особенности этого явления, резко отличающие его от обычного резонанса при стационарном режиме.

При прохождении через резонанс существенное влияние на резонансные кривые оказывает скорость изменения частоты внешней силы: при ее

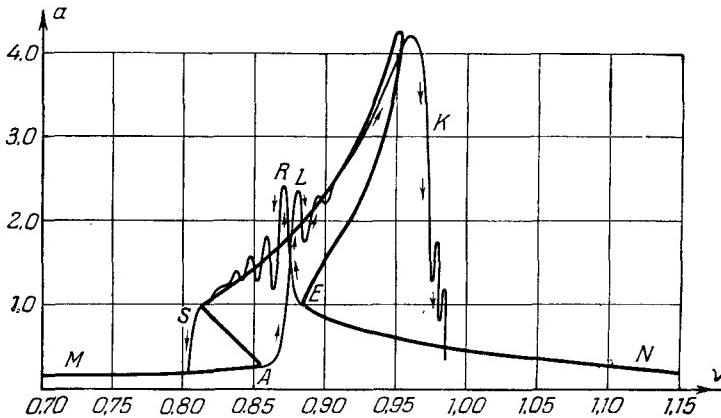


Рис. 113.

увеличении максимумы амплитуды снижаются, а острота первого максимума становится меньше остроты стационарной резонансной кривой.

После достижения первого максимума наблюдаются биения амплитуд, причем чем быстрее осуществляется прохождение через резонанс, тем характернее выражены после первого максимума несколько максимумов меньшей величины.

Если при стационарном резонанском режиме в системе вследствие нелинейности имеются точки разрыва амплитуды, то при прохождении

через резонанс для соответствующих значений частоты наблюдаются резкие изменения амплитуды (особенно для медленного прохождения).

Максимумы амплитуды имеют место не в момент совпадения частоты возмущающей силы с собственной частотой системы, а позже или раньше, что зависит от скорости изменения частоты, характера нелинейности, а также от направления изменения частоты.

В каждом конкретном случае нелинейность накладывает специфический отпечаток не только на стационарную резонансную кривую, но и на кривые прохождения через резонанс, причем чем медленнее прохождение через резонанс, тем сильнее сказываются особенности данной нелинейности.

Остановимся теперь на исследовании некоторых примеров нелинейных колебательных систем с переменными коэффициентами, в которых возможен более сложный резонанс.

В качестве первого примера рассмотрим поведение амплитуды при резонансе  $n$ -го рода в зависимости от режима изменения расстройки в колебательном контуре с регенерацией при помощи лампы. Этот пример в случае  $n = 2$  при постоянной расстройке рассматривался нами в § 15.

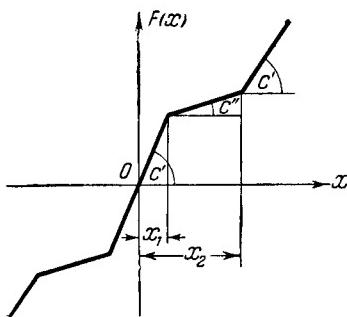


Рис. 114

Если расстройка  $\xi = \frac{\nu^2 - 4\omega^2}{4\omega^2}$  изменяется

со временем, то, как нетрудно видеть, вместо (15.50) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(\tau) f\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(\tau)\right) + E \sin 2t, \quad (19.40)$$

которое при помощи замены переменной

$$x = z - \frac{E}{3} \sin 2t \quad (19.41)$$

может быть приведено к виду

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \varepsilon(\tau) f\left(z - \frac{E}{3} \sin 2t, \frac{dz}{dt} - \frac{2E}{3} \cos 2t, \xi(\tau)\right). \quad (19.42)$$

Предположим, как и в § 15, что

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(\tau)\right) = [k(\tau) + 2x + \gamma x^2] \frac{dx}{dt} + \frac{\xi(\tau)}{0,016} x, \quad (19.43)$$

причем для определенности положим:

$$\left. \begin{aligned} k(\tau) &= k_0 - 2\bar{\delta} \frac{\xi(\tau)}{3}, \quad \varepsilon(\tau) = \frac{0,016}{1 + \xi(\tau)}, \quad \lambda = 0,016, \\ \bar{\delta} &= 0,013, \quad \gamma = -2, \quad \xi_0 = -0,05. \end{aligned} \right\} \quad (19.44)$$

Тогда уравнение (19.42) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = \frac{0,016}{1 + \xi(\tau)} \left\{ k(\tau) - 2 \left( z - \frac{E}{3} \sin 2t \right) + \right. \\ \left. + \gamma \left( z - \frac{E}{3} \sin 2t \right)^2 \right\} \left( \frac{dz}{dt} - \frac{2E}{3} \cos 2t \right) + \frac{\xi(\tau)}{1 + \xi(\tau)} \left( z - \frac{E}{3} \sin 2t \right). \quad (19.45)$$

Воспользовавшись формулами (19.6) и (19.7) и полагая  $p = 1$ ,  $q = 2$ , после ряда выкладок в первом приближении получим:

$$z = a \cos(t + \vartheta), \quad (19.46)$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon(\tau) \left\{ \frac{1}{2} a \left[ k(\tau) + \frac{\gamma a^2}{4} \right] + \frac{\gamma E^2 a}{36} + \frac{a E}{6} \sin 2\vartheta \right\}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon(\tau) \left\{ -\frac{\xi(\tau)}{2\beta} + \frac{E}{6} \cos 2\vartheta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (19.47)$$

Для построения графиков, характеризующих изменение амплитуды колебания при резонансе 2-го рода для различных режимов изменения расстройки  $\xi(\tau)$ , необходимо, как и обычно, численно проинтегрировать систему уравнений (19.47).

Для определенности предположим, что расстройка изменяется за счет изменения собственной частоты  $\omega$  колебательной системы, причем предположим, что  $\xi(\tau)$  изменяется согласно формуле

$$\xi(\tau) = \xi_0 + at. \quad (19.48)$$

Подставляя это выражение в уравнения (19.47) и произведя численное интегрирование, получаем кривые, характеризующие зависимость  $a$  от  $\xi$  для различных значений  $a$  (рис. 115).

На этом же рисунке для сопоставления приведена резонансная кривая при стационарном режиме, построенная согласно формуле (15.72) (жирая линия).

Анализируя полученный график, можно сделать ряд выводов. Как и обычно, при увеличении скорости прохождения через резонанс максимумы резонансных кривых снижаются и смещаются. Резко бросается в глаза существенное отличие в поведении амплитуды колебания при прохождении через резонанс второго рода по сравнению с рассмотренным выше примером прохождения через обычный резонанс. В то время как при прохождении через обычный резонанс (см. рис. 110) после первого максимума резонансной кривой наблюдалось еще несколько максимумов меньшей величины, и таким образом, колебания носили характер затухающих биений, в данном случае амплитуда после достижения максимального значения непрерывно убывает, стремясь к нулю.

В качестве второго примера рассмотрим прохождение через параметрический резонанс.

Пусть на стержень длиной  $l$  с шарнирно закрепленными концами (рис. 116) действует «периодическая» продольная сила

$$E_0 \cos \theta, \quad (19.49)$$

мгновенная частота которой  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ , медленно изменяясь со временем, проходит через удвоенное критическое значение (для определенности положим через удвоенное первое критическое значение).

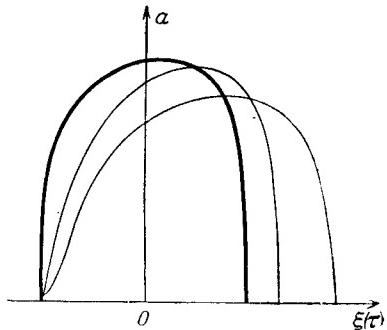


Рис. 115.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня можем записать в виде

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E_0 \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0, \quad (19.50)$$

где, как и в § 17,  $A$  — площадь поперечного сечения,  $EI$  — жесткость,  $\gamma$  — плотность материала, из которого сделан стержень,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Границные условия будут

$$\left. \begin{array}{l} y \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0, \\ y \Big|_{z=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=l} = 0, \end{array} \right\} \quad (19.51)$$

и поэтому путем подстановки

$$y = x \sin \pi \frac{z}{l}$$

уравнение (19.50) можем свести к следующему:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 - h \cos \theta) x = 0, \quad (19.52)$$

где обозначено:

$$h = \frac{E_0 l^2}{EI\pi}, \quad \omega^2 = \frac{EIg\pi^2}{\gamma Al^4}.$$

Предположим, что  $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau) = v_0 + at$ , изменяясь со временем, пройдет через удвоенное значение частоты  $\omega$ . В этом случае для исследования колебательного процесса построим первое приближение, соответствующее резонансу  $p = 1$ ,  $q = 2$ . Для этого мы можем воспользоваться непосредственно формулами, выведенными выше для уравнения (19.25). Итак, согласно (19.27) и (19.33) имеем:

$$x = a \cos \left( \frac{1}{2} \theta + \vartheta \right),$$

где  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = - \frac{ah\omega^2}{2(v_0 + at)} \sin 2\vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \frac{v_0 + at}{2} - \frac{h\omega^2}{2(v_0 + at)} \cos 2\vartheta. \end{array} \right\} \quad (19.53)$$

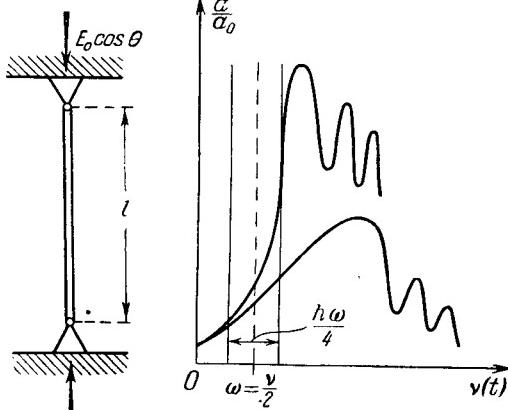


Рис. 116.

Рис. 117.

Задаваясь численными значениями  $h$ ,  $\omega$ ,  $v_0$ ,  $a$  и интегрируя систему (19.53) численно, получаем кривые прохождения через параметрический резонанс, приведенные на рис. 117.

ГЛАВА IV

## ОДНОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

### § 20. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы

Колебательные системы со многими степенями свободы, и даже с бесконечным их числом, постоянно встречаются во многих актуальных проблемах современной техники.

Как известно, даже в случае, если колебания в таких системах описываются дифференциальными уравнениями, близкими к линейным, то приложение обычных асимптотических методов нелинейной механики, идея которых изложена нами выше, требует предварительного решения совокупности линейных дифференциальных уравнений с числом неизвестных пропорциональным числу степеней свободы, что создает значительные затруднения при практическом применении этих методов.

В колебательных системах со многими степенями свободы наличие неизбежного внутреннего трения, а также наличие внешних возмущающих сил приводят обычно к быстрому исчезновению высших частот, т. е. к установлению основного тона колебаний (или колебаний с какой-либо одной частотой  $\omega_k$ ). Поэтому целесообразно при исследовании системы со многими степенями свободы рассматривать одночастотный режим, т. е. колебания системы, при которых все точки нашей системы совершают колебания с одной и той же частотой.

Как будет видно из дальнейшего, построение асимптотических разложений в этом случае может быть произведено так, как если бы мы имели дело с колебательной системой с одной степенью свободы.

Для рассмотрения общего случая предположим, что одночастотные колебания в системе со многими степенями свободы описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (20.1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

переходящей при нулевом значении малого параметра  $\varepsilon$  в систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (20.2)$$

с постоянными коэффициентами. Систему дифференциальных уравнений

(20.2) будем в дальнейшем называть дифференциальными уравнениями невозмущенной системы.

Предположим, что в невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с некоторой частотой  $\omega$ :

$$x_k = a\varphi_k e^{i(\omega t + \psi)} + a\varphi_k^* e^{-i(\omega t + \psi)} \quad (20.3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

зависящие только от двух произвольных постоянных  $a, \psi$ ; здесь  $\varphi_k, \varphi_k^*$  — собственные функции, характеризующие форму колебания, а знак  $*$  указывает на переход к комплексно-сопряженной величине.

Предположим также, что в невозмущенной системе единственным статическим решением будет тривиальное решение:  $x_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и что, кроме того, в ней невозможны незатухающие колебания с частотами кратными  $\omega$  (условие отсутствия внутреннего резонанса).

При этих условиях будем искать решение невозмущенных уравнений (20.1), соответствующее одиночному колебанию нашей системы со многими степенями свободы, с помощью разложений

$$x_k = a\varphi_k e^{i\psi} + a\varphi_k^* e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \dots \quad (20.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

в которых  $u_k^{(1)}(a, \psi), u_k^{(2)}(a, \psi), \dots$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) являются периодическими функциями угла  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , а величины  $a$  и  $\psi$  как функции времени определяются дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

Таким образом, как и в предыдущих случаях, мы здесь ставим задачу определения функций

$$u_k^{(1)}(a, \psi), u_k^{(2)}(a, \psi), \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.6)$$

периодических, с периодом  $2\pi$ , по отношению к  $\psi$  и функций

$$A_1(a), A_2(a), \dots; B_1(a), B_2(a), \dots \quad (20.7)$$

таким образом, чтобы выражения (20.4) удовлетворяли бы уравнениям (20.1) всякий раз, когда  $a$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям (20.5).

Заметим, что, поскольку интегрирование уравнений (20.5) вводит только две произвольные постоянные, мы получаем с помощью выражений (20.4) приближенное представление не для общего решения уравнений (20.1), которое должно зависеть от  $n$  произвольных постоянных, а лишь для двупараметрического семейства частных решений. Так как в нелинейных системах принцип суперпозиции не имеет места, то, исходя из различных частных решений, мы не можем непосредственно построить общее решение. Однако в ряде важных случаев двупараметрическое многообразие решений (20.4) обладает особым свойством сильной устойчивости, заключающимся в том, что любое решение уравнений (20.1) при начальных значениях, близких к начальным значениям нашего двупараметрического многообразия интегральных кривых (20.4), при увеличении  $t$  стремится к решениям, принадлежащим к семейству (20.4). Рассматриваемое многообразие как бы притягивает к себе все близкие к нему решения.

Собственно говоря, только в этих случаях исследование решений типа (20.4) и может представлять физический интерес. В дальнейшем в главе, посвященной математическому обоснованию, мы более подробно остановимся на указанном вопросе устойчивости многообразий типа (20.4) и на вопросе получения критериев, при выполнении которых представляет интерес рассмотрение двупараметрических семейств типа (20.4).

Прежде чем переходить к решению поставленной задачи — определению функций (20.6) и (20.7), сделаем некоторые предварительные замечания о свойствах колебаний в невозмущенной системе, описываемой уравнениями (20.2), которыми нам придется воспользоваться.

Заметим прежде всего, что для системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^n (\delta_{kq} p - c_{kq}) x_q = 0 \quad (20.8)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = q, \\ 0, & \text{если } k \neq q; \end{cases}$$

разрешающий определитель

$$D(p) = D \| \delta_{kq} p - c_{kq} \| \quad (20.9)$$

в соответствии со сделанными предположениями о наличии в системе одночастотного колебательного режима имеет два простых сопряженных чисто мнимых корня  $p = +i\omega$  и  $p = -i\omega$  и, кроме того, значения  $p = 0$  и  $p = \pm im\omega$  (где  $m$  — любое целое число, отличное от единицы) не являются корнями уравнения  $D(p) = 0$ , т. е.

$$D(im\omega) \neq 0, \quad (20.10)$$

где  $-\infty < m < \infty$ ,  $m \neq \pm 1$ .

Обозначим нетривиальные решения системы уравнений (20.8) для значений  $p = +i\omega$  и  $p = -i\omega$  соответственно через  $\varphi_k$  и  $\varphi_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Возьмем сопряженную с (20.8) систему алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^n (\delta_{kq} p + c_{kq}) x_q = 0 \quad (20.11)$$

и обозначим ее нетривиальные решения для значений  $p = +i\omega$  и  $p = -i\omega$  соответственно через  $\chi_k$  и  $\chi_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Введя эти обозначения, рассмотрим вынужденные колебания, вызываемые в невозмущенной системе (20.2) внешними гармоническими силами

$$F_k e^{im\omega t}.$$

Эти колебания описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = F_k e^{im\omega t}. \quad (20.12)$$

Как известно, в случае, если  $m$  — любое целое положительное или отрицательное число, отличное от  $\pm 1$ , решения системы (20.12)

представляются формулой

$$\begin{aligned} x_k &= e^{im\omega t} \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q, \\ Z_{kq}(im\omega) &= \frac{D_{kq}(im\omega)}{D(im\omega)}, \end{aligned} \quad (20.13)$$

где  $D_{kq}(p)$  — соответствующие миноры определителя  $D(p)$ . Если  $m = \pm 1$ , то уравнения (20.12) не имеют, вообще говоря, периодического решения, поскольку  $D(\pm i\omega) = 0$ . Для того чтобы такое решение все же существовало, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=1}^n \chi_q F_q &= 0 && \text{для } n = 1, \\ \sum_{q=1}^n \chi_q^* F_q &= 0 && \text{для } n = -1. \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

При выполнении этих условий вынужденное колебание, определяемое уравнениями (20.12) для  $m = 1$ , представляется формулой

$$x_k = e^{i\omega t} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q + C \varphi_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.15)$$

в которой

$$S_{kq} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D_{kq}(p)}{\partial p} \\ \hline \frac{\partial D(p)}{\partial p} \end{array} \right\}_{p=i\omega} \quad (k, q = 1, 2, \dots, n)$$

и  $C$  — произвольная постоянная. Аналогичную формулу получаем и для  $n = -1$ .

Рассмотрим теперь задачу о нахождении периодического, с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = \sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.16)$$

т. е. задачу о нахождении вынужденного колебания в невозмущенной системе под действием сил

$$\sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Поскольку нас интересуют, разумеется, лишь вещественные решения, мы будем предполагать выполнеными условия вещественности

$$F_k^{(-m)} = F_k^{*(m)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (20.17)$$

Тогда на основании вышесказанного убеждаемся, что поставленная задача имеет решение только в случае, когда выполняются условия

$$\sum_{q=1}^n \chi_q F_q^{(1)} = 0, \quad \sum_{q=1}^n \chi_q^* F_q^{(-1)} = 0. \quad (20.18)$$

Заметим, между прочим, что благодаря (20.17) одно из этих условий является следствием другого.

Если условие (20.18) выполняется, то искомое периодическое решение представляется следующей формулой:

$$x_k = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im\omega t} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q^{(m)} \right\} + e^{i\omega t} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q^{(1)} + \\ + e^{-i\omega t} \sum_{q=1}^n S_{kq}^* F_q^{(-1)} + C\varphi_k e^{i\omega t} + C^* \varphi_k^* e^{-i\omega t} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.19)$$

содержащей две произвольные постоянные — вещественную и мнимую части  $C$ .

Заменяя в предыдущих выкладках  $\omega t$  на  $\psi$ , легко получить следующий результат, который нам понадобится в дальнейшем при определении функций (20.6).

Для того чтобы система уравнений

$$\omega \frac{\partial u_k}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q = \sum_{(-\infty < m < \infty)} F_k^{(m)} e^{im\psi}, \quad (20.20)$$

для которой выполняются условия вещественности (20.17), имела вещественное периодическое решение, с периодом  $2\pi$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^n F_k^{(1)} \chi_k = 0. \quad (20.21)$$

Если это условие выполнено, искомое решение имеет следующий вид:

$$u_k(\psi) = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) F_q^{(m)} \right\} + e^{i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq} F_q^{(1)} + \\ + e^{-i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq}^* F_q^{(-1)} + C\varphi_k e^{i\psi} + C^* \varphi_k^* e^{-i\psi}, \quad (20.22)$$

где  $C$  — произвольная комплексная постоянная.

После этих предварительных замечаний приступим к решению нашей основной задачи, т. е. к нахождению функций (20.6) и (20.7).

Разложение (20.4) напишем в виде

$$x_k = u_k^{(0)}(a, \psi) + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.23)$$

где для сокращения положено

$$u_k^{(0)}(a, \psi) = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (20.24)$$

Дифференцируя выражения (20.23) по времени и учитывая при этом уравнения (20.5), находим:

$$\frac{dx_k}{dt} = \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial a} + \dots \right\} \frac{da}{dt} + \\ + \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} + \dots \right\} \frac{d\psi}{dt} = \\ = \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1 + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon^3 \dots \\ (k = 1, 2, \dots, n),$$

и поэтому левые части уравнений (20.1) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(1)} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1 \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ {}^{(0)} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(2)} + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 + \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 \right\} + \varepsilon^3 \dots \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Подставляя (20.23) в правые части уравнений (20.1), можем их записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^3 \dots &= \varepsilon f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) + \\ &+ \varepsilon^3 \left\{ \sum_{r=1}^n f_{h_x_r}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) \right\} + \varepsilon^3 \dots \\ &(k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в последних двух выражениях, получим:

$$\omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_k^{(1)} = f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_1, \quad (20.25)$$

$$\omega \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_k^{(2)} = \sum_{r=1}^n f_{kx_r}^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} +$$

$$+ f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2, \quad (20.26)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

Из полученных систем уравнений (20.25), (20.26) и т. д. мы последовательно можем определить искомые функции  $u_k^{(1)}(a, \psi)$ ,  $u_k^{(2)}(a, \psi)$ , ..., ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), а также функции  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$ ,  $A_2(a)$ ,  $B_2(a)$ , ..., причем последние должны быть определены так, чтобы функции  $u_k^{(1)}(a, \psi)$ ,  $u_k^{(2)}(a, \psi)$ , ..., ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) были периодическими по  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Приступая к решению системы уравнений (20.25), рассмотрим разложение Фурье для функций  $f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) в комплексной форме:

$$f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) = \sum_{(-\infty < m < \infty)} \Phi_k^{(0)}(a) e^{im\psi} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

где

$$\Phi_k^{(m)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k^{(1)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) e^{-im\psi} d\psi,$$

Тогда систему уравнений (20.25), учитывая также обозначения (20.24), можем представить в виде

$$\omega \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} - \sum_{q=1}^n c_{kq} u_q^{(1)} = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} \Phi_k^{(m)}(a) e^{im\psi} + \\ + \{\Phi_k^{(1)}(a) - A_1 \varphi_k - iB_1 \varphi_k a\} e^{i\psi} + \{\Phi_k^{(-1)}(a) - A_1 \varphi_k^* + iB_1 \varphi_k^* a\} e^{-i\psi} \quad (20.27)$$

(k = 1, 2, ..., n).

Мы получили тем самым уравнения типа (20.20). Поэтому, для того чтобы из системы (20.27) можно было бы определить искомые функции  $u_k^{(1)}(a, \psi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), периодические по  $\psi$ , должно выполняться условие, аналогичное условию (20.21), т. е.

$$\sum_{q=1}^n \chi_q \{\Phi_q^{(1)}(a) - A_1 \varphi_q - iB_1 \varphi_q a\} = 0,$$

откуда находим выражения для  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$ :

$$A_1(a) + ia B_1(a) = \frac{\sum_{q=1}^n \chi_q \Phi_q^{(1)}(a)}{\sum_{q=1}^n \chi_q \varphi_q}. \quad (20.28)$$

Решая теперь уравнения (20.27), получаем в соответствии с (20.22) следующее выражение для функций  $u_k^{(1)}(a, \psi)$ :

$$u_k^{(1)}(a, \psi) = \sum_{\substack{(-\infty < m < \infty) \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im\omega) \Phi_k^{(m)}(a) \right\} + \\ + e^{i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq} \{\Phi_q^{(1)}(a) - (A_1(a) + ia B_1(a)) \varphi_q\} + e^{-i\psi} \sum_{q=1}^n S_{kq}^* \{\Phi_q^{(-1)}(a) - \\ - (A_1(a) - ia B_1(a)) \varphi_q^*\} + C_1(a) \varphi_k e^{i\psi} + C_1^*(a) \varphi_k^* e^{-i\psi} \quad (20.29)$$

(k = 1, 2, ..., n),

содержащее две произвольные функции — вещественную и мнимую части  $C_1(a)$ , не зависящие от  $\psi$ .

Чтобы несколько упростить это выражение, заметим, что по определению миноров  $D_{kq}(p)$  имеем тождественно:

$$\left. \begin{aligned} p D_{kq}(p) - \sum_{r=1}^n c_{kr} D_{rq}(p) &= \delta_{kq} D(p), \\ p D_{kq}(p) - \sum_{r=1}^n c_{rq} D_{kr}(p) &= \delta_{kq} D(p), \end{aligned} \right\} \quad (20.30)$$

где

$$\delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q. \end{cases}$$

Полагая в (20.30)  $p = i\omega$ , видим, что при любом фиксированном  $q$  величины  $x_k = D_{kq}(i\omega)$  удовлетворяют уравнениям (20.8) и, следовательно, должны быть пропорциональны  $\varphi_k$ . Аналогично при любом фиксированном  $k$   $D_{kq}(i\omega)$  должны быть пропорциональны  $\chi_q$ .

Таким образом, имеем:

$$D_{kq}(i\omega) = \lambda \varphi_k \chi_q. \quad (20.31)$$

Дифференцируя (20.30) по  $p$  и затем полагая  $p = i\omega$ , получим в силу (20.31):

$$\lambda \varphi_k \chi_q + i\omega D'_{kq}(i\omega) - \sum_{r=1}^n c_{kr} D'_{rq}(i\omega) = \delta_{kq} D'(i\omega),$$

или, учитывая ранее введенные обозначения,

$$\frac{\lambda \varphi_k \chi_q}{D'(i\omega)} + i\omega S_{kq} - \sum_{r=1}^n c_{kr} S_{rq} = \delta_{kq}. \quad (20.32)$$

Таким образом, при любом фиксированном  $q$  величины  $y_k = S_{kq}$  удовлетворяют уравнениям:

$$i\omega y_k - \sum_{r=1}^n c_{kr} y_r = \delta_{kq} - \frac{\lambda \varphi_k \chi_q}{D'(i\omega)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^n \chi_k \left\{ \delta_{kq} - \frac{\lambda \varphi_k \chi_q}{D'(i\omega)} \right\} = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k \chi_k = \frac{D'(i\omega)}{\lambda} \neq 0, \quad (20.33)$$

поскольку корень  $p = i\omega$  уравнения  $D(p) = 0$  является простым.

Следовательно, видим, что знаменатель в формуле (20.28) всегда отличен от нуля.

Умножим теперь обе части (20.32) на  $\varphi_q$  и просуммируем результат по  $q$ . Так как согласно (20.33)

$$\varphi_k = - \frac{\sum_{q=1}^n \lambda \varphi_k \varphi_q \chi_q}{D'(i\omega)} \neq 0,$$

то будем иметь:

$$i\omega \left( \sum_{q=1}^n S_{kq} \varphi_q \right) - \sum_{r=1}^n c_{kr} \sum_{q=1}^n S_{rq} \varphi_q = 0, \quad (20.34)$$

и поэтому

$$\sum_{q=1}^n S_{kq} \varphi_q = \alpha \varphi_k, \quad \alpha = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Принимая во внимание полученные равенства и вводя вместо  $C_1(a)$  новую произвольную функцию

$$K(a) = C_1(a) - \alpha [A_1(a) + ia B_1(a)],$$

мы можем представить (20.29) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(a, \psi) = & \sum_{\substack{-\infty < m < \infty \\ m \neq \pm 1}} e^{im\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n Z_{kq}(im) \Phi_q^{(m)}(a) \right\} + \\ & + e^{i\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n S_{kq} \Phi_q^{(1)}(a) + K(a) \varphi_k \right\} + e^{-i\psi} \left\{ \sum_{q=1}^n S_{kq}^* \Phi_q^{(-1)}(a) + K^*(a) \varphi_k^* \right\} \quad (20.35) \\ & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Заметим, далее, что так как значения  $p = \pm i\omega$  являются простыми корнями уравнения  $D(p) = 0$ , то они будут простыми полюсами функций

$$Z_{kq}(p) = \frac{D_{kq}(p)}{D(p)},$$

и поэтому на основании (20.31) можем написать:

$$Z_{kq}(p) = \frac{\lambda \varphi_k \chi_q}{D'(i\omega)(p - i\omega)} + \frac{\lambda^* \varphi_k^* \chi_q^*}{D'(-i\omega)(p + i\omega)} + Z_{kq}^*(p), \quad (20.36)$$

где  $Z_{kq}^*(p)$  является регулярной функцией в окрестности точек  $p = \pm i\omega$ . Поскольку по определению

$$S_{kq} = \frac{D'_{kq}(i\omega)}{D'(i\omega)},$$

то мы видим, что  $S_{kq}$  будет значением регулярной части  $Z_{kq}(p)$  в точке полюса  $p = i\omega$ :

$$S_{kq} = \frac{\lambda^* \varphi_k^* \chi_q^*}{2i\omega D'(-i\omega)} + Z_{kq}^*(i\omega). \quad (20.37)$$

Аналогично  $S_{kq}^*$  будет значением соответствующей регулярной части  $Z_{kq}$  в точке полюса  $p = -i\omega$ :

$$S_{kq}^* = -\frac{\lambda \varphi_k \chi_q}{2i\omega D'(i\omega)} + Z_{kq}^*(i\omega). \quad (20.38)$$

В полученном нами выражении для функций  $u_k^{(1)}(a, \psi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (20.35) содержатся две произвольные функции — действительная и мнимая части  $K(a)$ . Для определения этих функций мы можем, как делали это ранее, наложить дополнительное требование, заключающееся в том, чтобы каждая из  $n$  функций  $u_k^{(1)}(a, \psi)$  не содержала основной гармоники, так как подобное требование привело бы к  $2n$  условиям.

В рассматриваемом случае воспользуемся следующим приемом.

Возьмем какие-либо постоянные  $g_1, \dots, g_n$  и образуем линейную комбинацию:

$$g_1 u_1^{(1)}(a, \psi) + \dots + g_n u_n^{(1)}(a, \psi). \quad (20.39)$$

Потребуем, чтобы в разложении Фурье для функции (20.39) отсутствовал член с  $e^{i\psi}$ . Для этого необходимо, чтобы имело место следующее соотношение:

$$\int_0^{2\pi} [g_1 u_1^{(1)}(a, \psi) + \dots + g_n u_n^{(1)}(a, \psi)] e^{-i\psi} d\psi = 0. \quad (20.40)$$

Подставляя в (20.40) значения  $u_k^{(1)}(a, \psi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (20.35), получаем одно линейное уравнение, из которого можем определить  $K(a)$ .

В частности, если в качестве  $g_1, \dots, g_n$  взяты вещественные величины, условие (20.40) будет эквивалентно условию отсутствия основной гармоники у функции (20.39).

Найдя, таким образом, вещественную и мнимую части  $K(a)$  и определив тем самым, согласно (20.35), вид функций  $u_k^{(1)}(a, \psi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), перейдем к решению уравнений (20.26).

Как и в предыдущем случае, для того, чтобы эти уравнения обладали периодическим решением по  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , необходимо, чтобы выполнялось условие типа (20.21), т. е. чтобы

$$\sum_{k=1}^n \chi_k \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^n f_{kx_r}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial a} A_2 - \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial \psi} B_2 \right\} e^{-i\psi} d\psi = 0.$$

Это условие дает нам возможность определить функции  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$ :

$$A_2(a) + iaB_2(a) = \\ = \sum_{k=1}^n \chi_k \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^n f_{kx_r}^{(1)'}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) u_r^{(1)} + f_k^{(2)}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial a} A_1 - \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial \psi} B_1 \right\} e^{-i\psi} d\psi \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \chi_k \varphi_k \quad (20.41)$$

Приняв это выражение для  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$ , мы можем найти из (20.26) периодические функции  $u_k^{(2)}(a, \psi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Таким образом, мы можем теперь построить приближенные решения системы уравнений (20.1), соответствующие одночастотному колебательному режиму.

В первом приближении имеем:

$$x_k = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.42)$$

где  $\varphi_k, \varphi_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений (20.8), в которых положено соответственно  $p = i\omega$  и  $p = -i\omega$ ;  $a$  и  $\psi$  — функции времени, определяемые уравнениями

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a), \end{cases} \quad (20.43)$$

в которых  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  находятся из (20.28).

Во втором приближении имеем:

$$x_k = \varphi_k a e^{i\psi} + \varphi_k^* a e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.44)$$

где  $u_k^{(1)}(a, \psi)$  определяются согласно формуле (20.35) а  $a$  и  $\psi$  — функции времени, определяемые из уравнений:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a), \end{cases} \quad (20.45)$$

в которых  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  определяются выражением (20.28), а  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$  выражением (20.41).

Резюмируя полученный результат, укажем сейчас формальный прием, с помощью которого можно построить первое и второе приближение для решений системы (20.1), соответствующих одночастотному колебательному процессу, зависящих от двух произвольных постоянных.

Прежде всего необходимо выделить невозмущенную линейную систему и убедиться, что в ней возможны гармонические собственные колебания с некоторой частотой  $\omega$ . Затем следует проверить, что собственные колебания с этой частотой зависят лишь от двух произвольных постоянных  $a$  и  $\theta$ :

$$x_k = \varphi_k a e^{i(\omega t + \theta)} + \varphi_k^* a e^{-i(\omega t + \theta)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (20.46)$$

и что в невозмущенной системе ( $\varepsilon = 0$ ) невозможны собственные незатухающие колебания ни на обертонах  $\omega$ , ни на «нулевой гармонике» (условие отсутствия «статических» решений, отличных от тривиального).

Далее рассматриваем вынужденные колебания

$$x_k = \sum_{r=1}^n Z_{kr}(i\alpha) F_r e^{i\alpha t},$$

возбуждаемые в невозмущенной системе приложенными силами  $F_r e^{i\alpha t}$ , и находим условие конечности вынужденных колебаний при  $\alpha = \omega$ :

$$\sum_{k=1}^n \chi_k F_k = 0.$$

Тогда в качестве первого приближения может быть использовано выражение (20.46), в котором  $a$  и  $\phi = \omega t + \theta$  являются функциями времени, определяемыми уравнениями первого приближения (20.43). Функции  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$ , входящие в эти уравнения, находим, подставляя (20.46) в «уравнение гармонического баланса»:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \chi_k \left\{ \frac{dx_k}{dt} - \sum_{r=1}^n c_{kr} x_r - \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_n) - \dots \right\}_{\mathbf{x}_i = u_i^{(0)}(a, \phi)} e^{-i\psi} d\phi = 0. \quad (20.47)$$

При такой подстановке дифференцирование совершают с учетом уравнений (20.43) и отбрасывают члены порядка малости выше первого.

Нетрудно проверить, что мы получим для  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  выражения, аналогичные тем, которые получаем согласно формуле (20.28).

Для построения второго приближения рассмотрим главные члены возмущающих сил

$$\varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

подставим в них значения  $x_1, \dots, x_n$  согласно формулам первого приближения (20.46) и разложим результат в ряд Фурье:

$$\sum_{(-\infty < m < \infty)} \varepsilon \Phi_k^{(m)}(a) e^{im(\omega t + \theta)}. \quad (20.48)$$

Считая здесь  $a$  и  $\theta$  постоянными, рассмотрим регуляризированное вынужденное колебание

$$\begin{aligned} \varepsilon u_k^{(1)}(a, \omega t + \theta) = & \sum_{\substack{-\infty < m < \infty \\ m \neq \pm 1}} e^{im(\omega t + \theta)} \left\{ \sum_{r=1}^n \varepsilon \Phi_r^{(m)}(a) Z_{kr}(im\omega) \right\} + \\ & + e^{i(\omega t + \theta)} \left\{ \sum_{r=1}^n S_{kr} \varepsilon \Phi_r^{(1)}(a) \right\} + e^{-i(\omega t + \theta)} \left\{ \sum_{r=1}^n S_{kr}^* \varepsilon \Phi_r^{(-1)}(a) \right\} \quad (20.49) \\ & (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

возбуждаемое в невозмущенной системе приложенными силами (20.48). Мы говорим о «регуляризованном» вынужденном колебании, подразумевая, что в гармонических компонентах вынужденного колебания, возбужденных «резонирующими членами»,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \Phi_k^{(1)} e^{i(\omega t + \theta)}, \\ & \varepsilon \Phi_k^{(-1)} e^{-i(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

из множителей  $Z_{kr}(p)$  удалены их особенности

$$\frac{\lambda \varphi_k \chi_r}{D'(i\omega)(p - i\omega)}$$

для  $p = i\omega$  и

$$\frac{\lambda^* \varphi_k^* \chi_r^*}{D'(-i\omega)(p + i\omega)}$$

для  $p = -i\omega$ .

Введем, далее, две произвольные вещественные функции  $K_1(a)$  и  $K_2(a)$  ( $K(a) = K_1(a) + iK_2(a)$ ), после чего в качестве второго приближения берем выражения вида

$$\begin{aligned} x_k = & \varphi_k a e^{i(\omega t + \theta)} + \varphi_k^* a e^{-i(\omega t + \theta)} + \varepsilon \varphi_k K(a) e^{i(\omega t + \theta)} + \\ & + \varepsilon \varphi_k^* K^*(a) e^{-i(\omega t + \theta)} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \omega t + \theta) \quad (20.50) \\ & (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

в которых

$$K(a) = K_1(a) + iK_2(a), \quad K^*(a) = K_1(a) - iK_2(a).$$

Выражения (20.50), очевидно, могут быть интерпретированы как сумма собственных колебаний и регуляризованных вынужденных колебаний.

Чтобы определить функции  $\varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a)$  и  $\varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a)$ , стоящие в правых частях уравнений второго приближения (20.45), подставляем значения  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) согласно формулам (20.50) в «уравнение гармонического баланса» (20.47), причем при дифференцировании учитываем уравнения второго приближения (20.45) и вычисления ведем с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Простая проверка убеждает нас в том, что изложенный формальный прием приводит к тем же результатам, что и разработанная выше теория асимптотических разложений.

**§ 21. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы, описываемые системой дифференциальных уравнений второго порядка**

Часто при исследовании колебательных систем со многими степенями свободы удобнее рассматривать систему  $N$  дифференциальных уравнений второго порядка, где  $N$  — число степеней свободы.

Мы рассмотрим частный случай, когда невозмущенная система соответствует обычной схеме теории малых колебаний.

Для исследования этого частного случая воспользуемся результатами, установленными в предыдущем параграфе. Как известно, в этом случае невозмущенная система полностью характеризуется кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (21.1)$$

и потенциальной энергией

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N c_{rs} q_r q_s, \quad (21.2)$$

где  $q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) — обобщенные координаты и  $a_{rs}$ ,  $c_{rs}$  — соответственно инерционные и квазиупругие коэффициенты, причем  $a_{rs} = a_{sr}$ ,  $c_{rs} = c_{sr}$ .

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергии (21.1) и (21.2) в уравнения Лагранжа, мы получаем дифференциальные уравнения невозмущенного движения в виде

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s\} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (21.3)$$

Предполагая, что возмущение определяется малыми обобщенными силами вида

$$\begin{aligned} Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \\ &= \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \varepsilon^3 \dots \quad (21.4) \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

приходим к задаче исследования следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \{a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s\} &= \\ &= \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \varepsilon^3 \dots \quad (21.5) \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

которые при  $\varepsilon = 0$  вырождаются в уравнения (21.3).

Прежде чем переходить к применению результатов предыдущего параграфа к исследованию системы уравнений (21.5), остановимся на некоторых свойствах решений системы невозмущенных уравнений (21.3).

Как известно, частные решения невозмущенной системы (21.3), соответствующие нормальным колебаниям, представляются выражениями:

$$q_s = \varphi_s^{(j)} a e^{i(\omega_j t + \theta)} + \varphi_s^{(j)*} a e^{-i(\omega_j t + \theta)} \\ (s, j = 1, 2, \dots, N)$$

или в вещественной форме

$$q_s = \varphi_s^{(j)} a \cos(\omega_j t + \theta) \quad (s, j = 1, 2, \dots, N), \quad (21.6)$$

где  $\omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) — собственные частоты, определяемые характеристическим уравнением

$$D \| -a_{rs}\omega^2 + c_{rs} \| = 0, \quad (21.7)$$

$\varphi_s^{(j)}$  ( $s, j = 1, 2, \dots, N$ ) — нормальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^N \{ -a_{rs}\omega_j^2 + c_{rs} \} \varphi_s^{(j)} = 0 \quad (r, j = 1, 2, \dots, N), \quad (21.8)$$

обладающие свойством ортогональности

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{r, s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(j)} \varphi_s^{(l)} = 0, \\ \sum_{r, s=1}^N c_{rs} \varphi_r^{(j)} \varphi_s^{(l)} = 0 \quad (j \neq l), \end{array} \right\} \quad (21.9)$$

а  $a$  и  $\theta$  — вещественные произвольные постоянные.

Заметим далее, что вынужденные колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе (21.3) гармоническими обобщенными силами

$$Q_r = E_r \cos(\alpha t + \vartheta) \quad (r = 1, 2, \dots, N),$$

определяются выражениями:

$$q_s = u_s \cos(\alpha t + \vartheta) \quad (s = 1, 2, \dots, N).$$

Постоянные амплитуды  $u_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) удовлетворяют системе неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^N \{ -a_{rs}\alpha^2 + c_{rs} \} u_s = E_r \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (21.10)$$

для решения которой воспользуемся нормальными координатами. Будем искать выражение для  $u_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) в виде суммы

$$u_s = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_s^{(j)} \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (21.11)$$

где  $c_j$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя (21.11) в систему уравнений (21.10) и учитывая, что

$$\varphi_s^{(j)} \quad (s, j = 1, 2, \dots, N)$$

удовлетворяют системам однородных алгебраических уравнений (21.8), получим:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^N a_{rs} \{ \omega_j^2 - \alpha^2 \} c_j \varphi_s^{(j)} = E_r \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (21.12)$$

Умножая эти уравнения соответственно на  $\varphi_1^{(j_1)}$ ,  $\varphi_2^{(j_1)}$ , ...,  $\varphi_N^{(j_1)}$  и суммируя результат по  $r$ , находим:

$$\sum_{j=1}^N c_j \{ \omega_j^2 - \alpha^2 \} \sum_{s, r=1}^N a_{rs} \varphi_s^{(j)} \varphi_r^{(j_1)} = \sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(j_1)}. \quad (21.13)$$

Принимая во внимание ортогональность нормальных функций (выражения (21.9)) и вводя обозначения

$$\sum_{r, s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(j)} \varphi_s^{(j)} = m_j \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (21.14)$$

находим:

$$u_s = \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \alpha^2)} \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (21.15)$$

Таким образом, условие конечности вынужденных колебаний в случае, когда частота внешней силы  $\alpha$  равна одной из собственных частот, например  $\omega_1$ , будет иметь вид:

$$\sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(1)} = 0. \quad (21.16)$$

При выполнении этого условия амплитуды вынужденных колебаний определяются формулой

$$u_s = \sum_{j=2}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N E_r \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \alpha^2)} + C \varphi_s^{(1)} \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (21.17)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

После сделанных кратких замечаний о собственных и вынужденных колебаниях в невозмущенной системе (21.3) перейдем к исследованию системы возмущенных уравнений (21.5).

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим задачу о построении асимптотических приближенных формул для частных решений, соответствующих одночастотным колебаниям, близким (при малых  $\epsilon$ ) к одному из нормальных невозмущенных колебаний (21.6), например к нормальному колебанию

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (21.18)$$

с частотой  $\omega_1$ .

Чтобы удовлетворить условиям применимости метода, изложенного в предыдущем параграфе, необходимо сделать следующие допущения:

1. В невозмущенной системе возможны незатухающие гармонические колебания с частотой  $\omega_1$ , зависящие только от двух произвольных постоянных.

2. Единственным решением, соответствующим равновесию в невозмущенной системе, является тривиальное решение

$$q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0.$$

3. Частота  $\omega_1$ , а также ни один из ее обертонов  $2\omega_1, 3\omega_1, \dots, k\omega_1, \dots$  не равны какой-либо собственной частоте  $\omega_2, \dots, \omega_N$  невозмущенной системы (отсутствует внутренний резонанс).

При этих условиях мы можем применить наш метод и построить асимптотические разложения

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \omega_1 t + \theta) + \varepsilon^3 \dots \quad (21.19)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

в которых  $a$  и  $\phi = \omega_1 t + \theta$  определяются дифференциальными уравнениями вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \varepsilon^3 \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \right\} \quad (21.20)$$

Функции  $u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta)$ ,  $u_s^{(2)}(a, \omega_1 t + \theta)$ ,  $\dots$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ );  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$ ,  $\dots$ ;  $B_1(a)$ ,  $B_2(a)$ ,  $\dots$ , стоящие в правых частях выражений (21.19) и уравнений (21.15), могут быть определены совершенно так же, как и в предыдущем параграфе. Однако нетрудно убедиться, что первые члены разложений (21.19) и (21.20), необходимые для построения решений в первом и во втором приближении, могут быть найдены с помощью формального приема, сформулированного в предыдущем параграфе.

Выведем вначале формулы для первого приближения. Как и в предыдущем параграфе, в качестве первого приближения принимаем выражения

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \phi \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (21.21)$$

в которых амплитуда  $a$  и полная фаза  $\phi$  определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

Здесь функции  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  можем найти, подставляя (21.21) в уравнения гармонического баланса:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) - \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \dots \right\} \cos \phi \, d\phi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) - \varepsilon Q_r^{(1)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - \dots \right\} \sin \phi \, d\phi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.23)$$

причем при подстановке ограничиваются только членами первого порядка малости включительно.

Найдем явные выражения для  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$ . Дифференцируя (21.21), учитывая при этом уравнения (21.22), находим с точностью до величин первого порядка малости:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_s &= \varphi_s^{(1)} [\varepsilon \cos \phi A_1(a) - a \omega_1 \sin \phi - \varepsilon a \omega_1 \sin \phi B_1(a)], \\ \ddot{q}_s &= \varphi_s^{(1)} [-\varepsilon 2 \omega_1 \sin \phi A_1(a) - a \omega_1^2 \cos \phi - \varepsilon 2 a \omega_1 \cos \phi B_1(a)] \end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Подставляя (21.21) и (21.24) в выражения (21.23), находим с той же степенью точности:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N \varphi_s^{(1)} [-a_{rs} (a\omega_1^2 \cos \psi + 2a\omega_1 \varepsilon \cos \psi B_1(a) + 2\varepsilon\omega_1 \sin \psi A_1(a)) + \right. \\ \left. + c_{rs} a \cos \psi] - \varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \right\} \cos \psi d\psi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \left\{ \sum_{s=1}^N \varphi_s^{(1)} [-a_{rs} (a\omega_1^2 \cos \psi + 2a\omega_1 \varepsilon \cos \psi B_1(a) + 2\varepsilon\omega_1 \sin \psi A_1(a)) + \right. \\ \left. + c_{rs} a \cos \psi] - \varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \right\} \sin \psi d\psi = 0.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, полагая при интегрировании по  $\psi$ , что  $a$  — постоянная и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \pi,$$

получим:

$$2a\omega_1 \pi \varepsilon B_1(a) \sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} a_{rs} - a\pi \sum_{r,s=1}^N (c_{rs} - a_{rs}\omega_1^2) \varphi_s^{(1)} \varphi_r^{(1)} = \\ = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \cos \psi d\psi, \\ 2\omega_1 \pi \varepsilon A_1(a) \sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} a_{rs} = \\ = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \sin \psi d\psi.$$

Учитывая, что

$$\sum_{r,s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} = m_1, \quad \sum_{s=1}^N (c_{rs} - a_{rs}\omega_1^2) \varphi_s^{(1)} = 0,$$

окончательно получаем следующие формулы:

$$\varepsilon A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\omega_1 \pi m_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \sin \psi d\psi, \\ \varepsilon B_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\omega_1 \pi m_1 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \cos \psi d\psi. \quad \boxed{(21.25)}$$

Заметим теперь, что формулы (21.25) можно получить гораздо проще, проведя аналогию с результатами первого параграфа для системы с одной степенью свободы.

Действительно, на основании (21.7) и (21.14), можем написать:

$$\sum_{r,s=1}^N c_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(1)} = m_1 \omega_1^2.$$

Полагая  $x = a \cos \psi$ , вместо (21.23) получаем следующие уравнения гармонического баланса:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \dot{\varphi}_1^{(1)} x, \dots, \dot{\varphi}_N^{(1)} x) \right\} \cos \psi d\psi = 0, \\ & \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \right. \\ & \left. - \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \dot{\varphi}_1^{(1)} x, \dots, \dot{\varphi}_N^{(1)} x) \right\} \sin \psi d\psi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.26)$$

Отсюда совершенно очевидно, что уравнения первого приближения (21.22) должны оказаться теми же, что и для системы с одной степенью свободы с массой  $m_1$ , упругостью  $m_1 \omega_1^2$ , находящейся под воздействием возмущающей силы:

$$\varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \dot{\varphi}_1^{(1)} x, \dots, \dot{\varphi}_N^{(1)} x). \quad (21.27)$$

Поэтому, воспользовавшись формулами (1.27), выведенными для случая системы с одной степенью свободы и подставляя в них вместо  $f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi)$  выражение (21.27), мы сразу находим формулы (21.25).

Остановимся еще на простой энергетической интерпретации полученных формул (21.25).

Рассмотрим для этого выражение виртуальной работы  $\delta W$ , которую совершили бы возмущающие обобщенные силы

$$Q_r^{(1)} (q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \quad (r = 1, 2, \dots, N)$$

в режиме синусоидальных колебаний

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi, \quad \dot{q}_s = -\omega_1 \varphi_s^{(1)} a \sin \psi,$$

на виртуальных перемещениях

$$\delta q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi \delta a - \varphi_s^{(1)} a \sin \psi \delta \psi,$$

соответствующих вариациям амплитуды и полной фазы нормального колебания. Имеем с принятой степенью точности, т. е. с точностью до величин первого порядка малости включительно:

$$\begin{aligned} \delta W = \varepsilon \sum_{r=1}^N & Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \times \\ & \times [\varphi_r^{(1)} \cos \psi \delta a - \varphi_r^{(1)} a \sin \psi \delta \psi]. \end{aligned} \quad (21.28)$$

Возьмем среднее значение этой работы за полный цикл колебания:

$$\overline{\delta W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta W d\psi. \quad (21.29)$$

Тогда, сопоставляя (21.28), (21.29) с (21.25), можем написать:

$$\overline{\delta W} = -m_1 \omega_1 a \varepsilon B_1(a) \delta a + m_1 \omega_1 a \varepsilon A_1(a) \delta \psi.$$

Обозначим символами

$$\frac{\overline{\delta W}}{\delta a}, \quad \frac{\overline{\delta W}}{\delta \psi}$$

коэффициенты при вариациях  $\delta a$  и  $\delta \psi$  в выражении для  $\overline{\delta W}$ .

Тогда будем иметь:

$$\varepsilon A_1(a) = \frac{1}{m_1 \omega_1 a} \frac{\overline{\delta W}}{\delta \psi}, \quad \varepsilon B_1(a) = -\frac{1}{m \omega_1 a} \frac{\overline{\delta W}}{\delta a}, \quad (21.30)$$

и поэтому уравнения первого приближения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{m_1 \omega_1 a} \frac{\overline{\delta W}}{\delta \psi}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 - \frac{1}{m_1 \omega_1 a} \frac{\overline{\delta W}}{\delta a}. \end{aligned} \quad (21.31)$$

Итак, чтобы получить уравнения первого приближения, достаточно определить только среднюю величину виртуальной работы за цикл колебания, которую совершили бы возмущающие силы в режиме синусоидальных колебаний на виртуальных перемещениях, соответствующих вариации их амплитуды  $a$  и фазы  $\psi$ .

Перейдем теперь к построению решений для уравнений (21.5) во втором приближении.

Для этого рассмотрим вначале, с точностью до величин первого порядка малости, вынужденные колебания, которые возбуждались бы в невозмущенной системе (21.3) обобщенными силами

$$Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \quad (r = 1, 2, \dots, N),$$

если бы в них  $q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N$  были бы синусоидальные:

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta), \quad \dot{q}_s = -\varphi_s^{(1)} a \omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (s = 1, 2, \dots, N).$$

Заметим, что тогда

$$\begin{aligned} Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \\ &= \varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) + \varepsilon^2 \dots \quad (r = 1, 2, \dots, N); \end{aligned}$$

Разложим  $\varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots)$  в ряд Фурье:

$$\varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) = \varepsilon f_r^{(0)}(a) +$$

$$\begin{aligned} &+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \{ f_r^{(k)}(a) \cos k(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(k)}(a) \sin k(\omega_1 t + \theta) \} \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

где

$$f_r^{(k)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \cos k\psi d\psi,$$

$$g_r^{(k)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_r^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots) \sin k\psi d\psi$$

$$(r = 1, 2, \dots, N; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Каждая из компонент этого рода с частотой  $k\omega_1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) в соответствии с (21.15) возбуждает вынужденное колебание

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \{f_r^{(k)}(a) \cos k(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(k)}(a) \sin k(\omega_1 t + \theta)\} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - k^2 \omega_1^2)}$$

$$(k = 2, 3, \dots),$$

$$\varepsilon \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N f_r^{(0)}(a) \varphi_r^{(j)}}{m_j \omega_j^2}, \quad k = 0$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

У гармоники с частотой  $\omega_1$  учтем в сумме (21.10) только члены, соответствующие возбуждению высших нормальных координат:

$$\varepsilon \sum_{j=2}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \{f_r^{(1)}(a) \cos(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(1)}(a) \sin(\omega_1 t + \theta)\} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \omega_1^2)}$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Таким образом, получаем «регуляризированное» вынужденное колебание, возбуждаемое в невозмущенной системе обобщенными силами  $Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon)$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), в которых  $q_s, \dot{q}_s$  ( $s = 1, \dots, N$ ) синусоидальны, в следующем виде (с точностью до величин первого порядка малости включительно):

$$\varepsilon u_s^{(1)}(a, \omega_1 t + \theta) = \varepsilon \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N f_r^{(0)}(a) \varphi_r^{(j)}}{m_j \omega_j^2} +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=2}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \{f_r^{(1)}(a) \cos(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(1)}(a) \sin(\omega_1 t + \theta)\} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - \omega_1^2)} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)} \frac{\sum_{r=1}^N \{f_r^{(k)}(a) \cos k(\omega_1 t + \theta) + g_r^{(k)}(a) \sin k(\omega_1 t + \theta)\} \varphi_r^{(j)}}{m_j (\omega_j^2 - k^2 \omega_1^2)} \quad (21.32)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Складывая эти выражения с первым приближением, получаем решения уравнений (21.5) во втором приближении:

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \phi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \phi) \quad (21.33)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Как и в предыдущем параграфе можно было бы добавить сюда члены типа  $\varepsilon \{C_1(a) \cos \phi + C_2(a) \sin \phi\} \varphi^{(1)}$ , содержащие две функции  $C_1(a)$  и  $C_2(a)$ . Но поскольку их выбор произволен, то для получения более простых формул положим  $C_1(a) = C_2(a) = 0$  и будем в дальнейшем оперировать с выражениями (21.33).

Для того чтобы выражения (21.33) давали в действительности второе приближение, в них  $a$  и  $\phi$  должны быть функциями времени, определяемыми из уравнений второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \right\} \quad (21.34)$$

Входящие сюда функции  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$  могут быть найдены с помощью подстановки второго приближения (21.33) в уравнения гармонического баланса (21.23). При этом дифференцирование по времени должно быть выполнено с учетом уравнений (21.34) так, чтобы производные по  $t$  не фигурировали под знаком интеграла, а интегрирование по  $\phi$  должно совершаться, как если бы  $a$  было постоянным параметром и все вычисления велись бы с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Заметим теперь, что в формулах (21.32) гармоники первого порядка  $\cos \phi$  и  $\sin \phi$  входят только в члены, пропорциональные  $\varphi_r^{(2)}$ ,  $\varphi_r^{(3)}$ , ...,  $\varphi_r^{(N)}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ), и что имеют место соотношения:

$$\sum_{r,s=1}^N a_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(j)} = 0, \quad \sum_{r,s=1}^N c_{rs} \varphi_r^{(1)} \varphi_s^{(j)} = 0$$

$$(j = 2, 3, \dots, N).$$

Поэтому выражения

$$\sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} a_{rs} u_s^{(1)}(a, \phi), \quad \sum_{r,s=1}^N \varphi_r^{(1)} c_{rs} u_s^{(1)}(a, \phi)$$

не содержат гармоник первого порядка.

Учитывая сделанные замечания, мы можем уравнения гармонического баланса (21.23) представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} [\varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots)] \right\} \cos \phi d\phi = 0, \\ \int_0^{2\pi} \left\{ m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) - \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} [\varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots)] \right\} \sin \phi d\phi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.35)$$

где, как и выше,  $x = a \cos \phi$ .

Поскольку выражение

$$m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) \quad (21.36)$$

состоит лишь из первой гармоники по отношению к  $\psi$ , то уравнения (21.35) эквивалентны уравнению, выражающему равенство выражения (21.36) первой гармонике суммы:

$$\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} (\varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots)).$$

Обозначим первую гармонику какой-либо периодической функции  $F(\psi)$  через  $H_1\{F\}$ :

$$H_1\{F\} = \cos \psi \int_0^{2\pi} F(\psi) \cos \psi d\psi + \sin \psi \int_0^{2\pi} F(\psi) \sin \psi d\psi.$$

Тогда уравнение, эквивалентное выражениям (21.35), можем написать в следующем виде:

$$m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) = H_1 \left\{ \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} [\varepsilon Q_r^{(1)} (\varphi_1^{(1)} x + \varepsilon u_1^{(1)}, \dots) + \varepsilon^2 Q_r^{(2)} (\varphi_1^{(1)} x, \dots)] \right\}. \quad (21.37)$$

Разумеется, что это уравнение должно удовлетворяться лишь с точностью до величин второго порядка малости включительно, причем в выражениях обобщенных сил  $q_r$  и  $\dot{q}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) должны быть заменены согласно формулам (21.33) с учетом уравнений (21.34).

Заметим теперь, что так как  $x = a \cos \psi$ , то мы можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x &= \varepsilon \{-2\omega_1 A_1 \sin \psi - 2\omega_1 a B_1 \cos \psi\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left( A_1 \frac{dA_1}{da} - a B_1^2 - 2\omega_1 a B_2 \right) \cos \psi - \left( 2\omega_1 A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi \right\}. \end{aligned} \quad (21.38)$$

Разлагая правую часть уравнения (21.37) по степеням  $\varepsilon$  и удерживая лишь первые два члена, находим:

$$\begin{aligned} H_1 \left\{ \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r (q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) \right\} &= \\ &= \{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)\} \cos \psi + \{\varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a)\} \sin \psi. \end{aligned} \quad (21.39)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках и одинаковых степенях  $\varepsilon$  в правых частях выражений (21.38) и (21.39), находим:

$$A_1(a) = -\frac{M_1(a)}{2\omega_1 m_1}, \quad B_1(a) = -\frac{L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a}, \quad (21.40)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{A_1(a) B_1(a)}{\omega_1} - \frac{A_1(a)}{2\omega_1} a \frac{dB_1(a)}{da} - \frac{M_2(a)}{2\omega_1 m_1}, \\ B_2(a) &= -\frac{B_1^2(a)}{2\omega_1} + \frac{A_1(a)}{2\omega_1 a} \frac{dA_1(a)}{da} - \frac{L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a}. \end{aligned} \right\} \quad (21.41)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (21.40) дают для  $A_1(a)$  и  $B_1(a)$  те же выражения, что и ранее полученные формулы (21.25).

Итак, уравнения второго приближения могут быть написаны в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a)}{2\omega_1 m_1} - \frac{\varepsilon^2 A_1(a) B_1(a)}{\omega_1} - \frac{\varepsilon^2 A_1(a)}{2\omega_1} \frac{dB_1(a)}{da} a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(a)}{2\omega_1} + \varepsilon^2 \frac{A_1(a)}{2\omega_1 a} \frac{dA_1(a)}{da}. \end{aligned} \right\} \quad (21.42)$$

Заметим теперь, что с точки зрения обычной теории малых колебаний, сумма

$$\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r$$

представляет собой обобщенную силу, действующую на первую нормальную координату.

Таким образом, чтобы написать уравнения второго приближения в явной форме, достаточно уметь подсчитать первую гармонику этой обобщенной силы с учетом членов не выше второго порядка малости.

Рассмотрим частный случай стационарных одночастотных колебаний с постоянной амплитудой. В этом случае фаза  $\psi$  вращается равномерно с некоторой угловой скоростью  $\omega_1(a)$ :

$$\psi = \omega_1(a)t + \theta, \quad \theta = \text{const.}$$

Из (21.42) имеем:

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \varepsilon^2 \frac{B_1^2(a)}{2\omega_1} + \varepsilon^2 \frac{A_1(a)}{2\omega_1 a} \frac{dA_1(a)}{da},$$

а также

$$M_1(a) + \varepsilon M_2(a) + \varepsilon 2m_1 A_1(a) B_1(a) + \varepsilon 2m_1 A_1(a) \frac{dB_1(a)}{da} a = 0,$$

или  $A_1(a) + \varepsilon A_2(a) = 0$ .

Последнее равенство показывает, что  $M_1(a)$  и  $A_1(a)$  будут величинами первого порядка малости, и потому с той же степенью точности можем написать:

$$\varepsilon M_1(a) + \varepsilon^2 M_2(a) = 0 \quad (21.43)$$

и

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2 B_1^2(a)}{2\omega_1},$$

или, учитывая (21.40),

$$\omega_1(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a} - \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1} \left( \frac{L_1(a)}{2\omega_1 m_1 a} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 L_2(a)}{2\omega_1 m_1 a}.$$

Возводя в квадрат и отбрасывая члены порядка малости выше второго, для квадрата частоты стационарных колебаний получаем окончательно

следующее выражение:

$$\omega_1^2(a) = \omega_1^2 - \frac{\varepsilon L_1(a) + \varepsilon^2 L_2(a)}{m_1 a}. \quad (21.44)$$

Итак, расчет стационарных одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы может производиться по следующей простой схеме.

Прежде всего определяем обобщенную силу, действующую на первую нормальную координату; заменяя в ней  $q_r$ ,  $\dot{q}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) согласно формулам (21.33), где  $u^{(1)}(a, \phi)$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) определены как вынужденные «регуляризованные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе внешними силами, в режиме синусоидальных колебаний; раскладываем полученное выражение обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату, в ряд Фурье. После этого коэффициент при синусе, взятый с точностью до величин второго порядка малости включительно, приравниваем нулю и получаем уравнение (21.43), из которого определяем стационарную амплитуду колебаний. Коэффициент при косинусе подставляем в правую часть формулы (21.44), определяющей частоту стационарных колебаний.

## § 22. Влияние внешних периодических сил на одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы

Перейдем теперь к рассмотрению колебательных систем со многими степенями свободы, находящихся под воздействием внешних периодических обобщенных сил, зависящих явно от времени и имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_r(\nu t, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) = & \varepsilon Q_r^{(1)}(\nu t, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \\ & + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\nu t, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \dots \quad (22.1) \\ & (r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Тогда мы приходим к рассмотрению системы  $N$  уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) = & \varepsilon Q_r^{(1)}(\nu t, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \\ & + \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\nu t, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \dots \quad (22.2) \\ & (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

в которой, как и в предыдущем параграфе,  $q_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) — обобщенные координаты,  $a_{rs} = a_{sr}$ ,  $c_{rs} = c_{sr}$  — постоянные.

Предположим, как и в § 13, что функции  $Q_r(\nu t, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon)$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) являются периодическими по отношению к  $\nu t$  с периодом  $2\pi$  и могут быть представлены в виде конечных сумм Фурье с коэффициентами, являющимися некоторыми полиномами по отношению к  $q_r$ ,  $\dot{q}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ).

Кроме того, предположим, что для невозмущенной системы уравнений:

$$\sum_{s=1}^N (a_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs}q_s) = 0 \quad (22.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N)$$

выполняются условия, приведенные в § 21, стр. 261.

При этих предположениях будем искать решения системы (22.2), соответствующие одиночастотному режиму, близкому к какому-либо нормальному колебанию, для определенности положим к нормальному колебанию с частотой  $\omega_1$ . При этом будем рассматривать как нерезонансные случаи, так и резонансные.

Ввиду того, что исследование одиночастотных режимов формально сводится к исследованию некоторого одного эквивалентного уравнения второго порядка вместо системы  $N$  уравнений второго порядка, то при построении приближенных решений для системы (22.2) воспользуемся, кроме методики и результатов предыдущих двух параграфов, также результатами главы III.

В нерезонансном случае \*), исходя из соображений, приведенных в § 13 (стр. 158), решение системы (22.2) следует искать в виде асимптотических рядов

$$q_s = q_s^{(1)} a \cos \phi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \phi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \nu t, \phi) + \varepsilon^3 \dots \quad (22.4)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

в которых  $u_s^{(1)}(a, \phi, \nu t)$ ,  $u_s^{(2)}(a, \phi, \nu t)$ , ... ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) — периодические по обеим угловым переменным с периодом  $2\pi$  функции, а амплитуда  $a$  и фаза  $\phi$  должны быть определены из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

Для определения функций  $u_s^{(1)}(a, \nu t, \phi)$ ,  $u_s^{(2)}(a, \nu t, \phi)$ , ... ( $s = 1, 2, \dots, N$ ),  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$ , ...,  $B_1(a)$ ,  $B_2(a)$ , ... можем воспользоваться непосредственно результатами, полученными в § 13 для случая системы с одной степенью свободы.

Вместо системы (22.2), описывающей одиночастотный колебательный режим, рассматриваем соответствующее ей одно уравнение второго порядка

$$m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) = \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_r(\nu t, \varphi_1^{(1)} x, \dots, \varphi_N^{(1)} x, \dot{\varphi}_1^{(1)} x, \dots, \dot{\varphi}_N^{(1)} x, \varepsilon), \quad (22.6)$$

для которого, воспользовавшись непосредственно формулами (13.35),

\*) Здесь под нерезонансным случаем мы подразумеваем случай, когда частота внешней силы  $\nu$  не совпадает ни с одной из собственных частот системы и не выполняются соотношения типа  $\nu \approx \frac{p}{q} \omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), где  $p$  и  $q$  — целые взаимно простые числа.

находим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) \sin \psi d\theta d\psi, \\ \varepsilon B_1(a) &= -\frac{1}{4\pi^2 m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) \cos \psi d\theta d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) &= \varepsilon Q_r^{(1)}(\theta, \varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, \varphi_N^{(1)} a \cos \psi, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots, \\ &\quad \dots, -\varphi_N^{(1)} a \omega_1 \sin \psi) \quad (22.8) \\ &(r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Далее, находим  $u_s^{(1)}(a, \psi, vt)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) как вынужденные «регуляризованные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе (22.3) силами (22.8), которые представляем в виде сумм Фурье (т. е. внешними обобщенными силами в первом приближении, взятыми в режиме синусоидальных колебаний:  $q_r = \varphi_r^{(1)} a \cos \psi$ ,  $\dot{q}_r = -\varphi_r^{(1)} a \omega_1 \sin \psi$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, vt, \psi) &= \varepsilon \sum_{n,m} Q_{r0}^{(1)}(a) e^{i(nvt + m\psi)} \quad (22.9) \\ &(r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{r0}^{(1)}(a) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi \quad (22.10) \\ &(r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Итак,  $u_s^{(1)}(a, vt, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) должны быть определены как вынужденные колебания из системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \left( a_{rs} \frac{d^2 u_s^{(1)}}{dt^2} + c_{rs} u_s^{(1)} \right) &= \varepsilon \sum_{n,m} Q_{r0}^{(1)}(a) e^{i(nvt + m\psi)} \quad (22.11) \\ &(r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Здесь  $\psi = \omega_1 t + \vartheta$ .

Искомые функции  $u_s^{(1)}(a, vt, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} u_s^{(1)}(a, vt, \psi) &= \sum_{n,m} k_{n,m}^{(s)}(a) e^{i(nvt + m\psi)} \quad (22.12) \\ &(s = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

в которых коэффициенты  $k_{n,m}^{(s)}(a)$  подлежат определению.

Подставляя значения  $u_s^{(1)}(a, vt, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) (22.12) в уравнения (22.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем для определения коэффициентов  $k_{n,m}^{(s)}(a)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ )

систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs} [-\omega_1^2 m - 2\nu\omega_1 mn - \nu^2 n^2] + c_{rs}\} k_{n,m}^{(s)}(a) = Q_{r0}^{(1)}(a) \quad (22.13)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N),$$

для решения которой воспользуемся нормальными координатами.

Будем искать выражение для  $k_{n,m}^{(s)}(a)$  в виде суммы

$$k_{n,m}^{(s)}(a) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_s^{(k)} \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (22.14)$$

где  $\varphi_s^{(k)}$  — нормальные функции, а  $c_k$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (22.14) в систему уравнений (22.13) и учитывая, что  $\varphi_s^{(k)} (s, k = 1, 2, \dots, N)$  удовлетворяют системе однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^N [-a_{rs}\omega_k^2 + c_{rs}] \varphi_s^{(k)} = 0 \quad (22.15)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N),$$

получим:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N a_{sr} [\omega_k^2 - (\omega_1 m + \nu n)^2] c_k \varphi_s^{(k)} = Q_{r0}^{(1)}(a)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Умножая эти уравнения соответственно на  $\varphi_1^{(k_1)}, \varphi_2^{(k_1)}, \dots, \varphi_N^{(k_1)}$  и суммируя результат по  $r$ , находим:

$$\sum_{k=1}^N c_k [\omega_k^2 - (\omega_1 m + \nu n)^2] \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N a_{sr} \varphi_s^{(k)} \varphi_r^{(k_1)} = \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(a) \varphi_r^{(k_1)}. \quad (22.16)$$

Принимая во внимание ортогональность нормальных функций (выражения (21.9)) и обозначение (21.14), находим:

$$c_k = \frac{\sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(a) \varphi_r^{(k)}}{m_k [\omega_k^2 - (\omega_1 m + \nu n)^2]} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (22.17)$$

Подставляя значения  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) (22.17) в (22.14) и результат подстановки в (22.12), получаем выражения для  $u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi) = \sum_{n, m} \sum_{k=1}^N \varphi_s^{(k)} \frac{\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(k)} Q_{r0}^{(1)}(a) e^{i(n\nu t + m\psi)}}{m_k [\omega_k^2 - (n\nu + m\omega_1)^2]} \quad (22.18)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Для «регуляризации» выражений (22.18) заметим, что их правые части могут сделаться неограниченными, если  $n$  и  $m$  таковы, что

$$\pm \omega_1 = n\nu + m\omega_1,$$

а последнее равенство ввиду того, что мы рассматриваем нерезонансный

случай, эквивалентно равенству

$$n^2 + (m^2 - 1)^2 = 0, \text{ или } n = 0, m = \pm 1.$$

Таким образом, для «регуляризации» выражений (22.18) необходимо, чтобы при  $k=1$  отсутствовали члены с гармониками  $e^{\pm i\psi}$ , а они как раз и будут отсутствовать благодаря нашему выбору функции (22.7).

Итак, для  $u_s^{(1)}(a_1, \nu t, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) получаем выражения:

$$u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n, m \\ (n \neq 0, m \neq \pm 1 \text{ для } k=1)}}^N \varphi_s^{(k)} \frac{\left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(k)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi \right\} e^{i(n\nu t + m\psi)}}{m_k [\omega_k^2 - (n\nu + m\omega_1)^2]} \quad (22.19)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Для определения функций  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$  можем либо воспользоваться непосредственно формулами § 13 (формулы (13.37)), либо составить уравнения гармонического баланса, выражающие равенство коэффициентов при первой гармонике угла  $\psi$  в левой и правой частях уравнения (22.6) после подстановки в него значений  $x = a \cos \psi$ ,  $q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \psi + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) с учетом, разумеется, того, что  $a$  и  $\psi$  определяются уравнениями (22.5), причем все вычисления следует вести с точностью до величин второго порядка малости включительно.

После элементарных выкладок получаем для  $A_2(a)$  и  $B_2(a)$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega_1 m_1} \left[ \frac{d B_1(a)}{da} a A_1(a) + 2 A_1(a) B_1(a) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2 \omega_1 m_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \bar{Q}_r^{(2)}(a, \theta, \psi) \sin \psi d\theta d\psi, \\ B_2(a) &= \frac{1}{2\omega_1 m_1 a} \left[ \frac{d A_1(a)}{da} A_1(a) - a B_1^2(a) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2 \omega_1 m_1 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} \bar{Q}_r^{(2)}(a, \theta, \psi) \cos \psi d\theta d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (22.20)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_r^{(2)}(a, \theta, \psi) &= Q_r^{(2)}(\theta, \varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, \varphi_N^{(1)} a \cos \psi, - \\ &\quad - \varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots, - \varphi_N^{(1)} a \omega_1 \sin \psi) + \sum_{s=1}^N \left\{ \frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial q_s} u_s^{(1)}(a, \theta, \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial \dot{q}_s} \left[ \varphi_s^{(1)} A_1(a) \cos \psi - \varphi_s^{(1)} a B_1(a) \sin \psi + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1 + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial t} \right] \right\}_{\substack{q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos \varphi \\ q_s = -\varphi_s^{(1)} a \omega_1 \sin \psi}} \quad (22.21) \end{aligned}$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Перейдем к рассмотрению резонансного случая.

Ради простоты изложения вместо общего случая, когда

$$\omega_1 \approx \frac{p}{q} \nu,$$

где  $p$  и  $q$  — некоторые взаимно простые числа, рассмотрим случай, называемый главным резонансным, когда  $p = q = 1$ . При этом заметим, что все рассуждения могут быть перенесены и на общий случай без существенных изменений.

Как уже нами выше указывалось, при рассмотрении резонансного случая, в зависимости от характера стоящей перед нами задачи, могут возникнуть два подхода к ее решению — исследование непосредственно резонансной области и изучение, помимо резонансной области, также подходов к ней из нерезонансной области.

Здесь мы рассмотрим второй, как наиболее общий случай, причем для нахождения соответствующих асимптотических формул опять воспользуемся результатами, полученными для системы с одной степенью свободы, в § 14.

Исходя из рассуждений, приведенных на стр. 176, приближенные решения будем искать в виде рядов

$$q_s = \varphi_s^{(1)} a \cos(\nu t + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(a, \nu t, \psi) + \dots \quad (22.22)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

где  $\psi = \nu t + \vartheta$ ,  $u_s^{(1)}(a, \theta, \psi)$ ,  $u_s^{(2)}(a, \theta, \psi)$ , ... ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) периодические функции по обеим угловым переменным  $\theta$  и  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , а  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены как функции времени из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - \nu + \varepsilon B_1(a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(a, \vartheta) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

Для построения первого и второго приближения нам необходимо найти выражения для  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $B_1(a, \vartheta)$ ,  $A_2(a, \vartheta)$ ,  $B_2(a, \vartheta)$  и  $u_s^{(1)}(a, \nu t, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ).

Для определения  $A_1(a, \vartheta)$  и  $B_1(a, \vartheta)$  сразу же составляет систему, аналогичную уравнениям (14.34).

Для этого в уравнениях (14.34) необходимо заменить  $\omega$  на  $\omega_1$ , учесть наличие обобщенной массы  $m_1$  и вместо  $f_0(a, \theta, \psi)$  подставить  $\sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi)$ , где

$$Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) = Q_r^{(1)}(\theta, \varphi_1^{(1)} a \cos \psi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \psi, \dots).$$

В результате получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1 - \nu) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega_1 B_1 &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2 m_1} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi, \\ (\omega_1 - \nu) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega_1 A_1 &= \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 m_1} \sum_{\sigma} e^{i\sigma q \vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i\sigma q \vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \\ &\quad (\vartheta' = \psi - \theta), \end{aligned} \right\} \quad (22.24)$$

из которой не представляет затруднений найти частные периодические по  $\vartheta$  значения  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $B_1(a, \vartheta)$ , как об этом уже упоминалось выше.

Для построения асимптотических формул во втором приближении определяем  $u_s^{(1)}(a, vt, vt + \vartheta)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) как вынужденные «регуляризованные» колебания, возбуждаемые в невозмущенной системе внешними возмущающими силами, взятыми в режиме синусоидальных колебаний, причем при «регуляризации» в отличие от нерезонансного случая в соответствующих суммах должны отсутствовать члены, для которых могут выполняться соотношения между индексами  $n, m$  типа  $nq + (m \pm 1)p = 0$  (для слагаемых, в знаменателе которых присутствует  $\omega_1$ ).

Таким образом, «регуляризованное» выражение для  $u_s^{(1)}(a, vt, vt + \vartheta)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_s^{(1)}(a, vt, vt + \vartheta) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n, m} \sum_{k=1}^N \varphi_s^{(k)} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varphi_r^{(1)} Q_{r0}^{(1)}(a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi}{m_k [\omega_k^2 - (\omega_1 m + \nu n)^2]} \times \\ &\quad \left( \begin{array}{c} nq + (m \pm 1)p \neq 0 \\ \text{для } k=1 \end{array} \right) \\ &\quad \times e^{i[nvt + m(vt + \vartheta)]} \quad (s = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (22.25)$$

Для составления уравнений, определяющих  $A_2(a, \vartheta)$  и  $B_2(a, \vartheta)$ , воспользуемся соответствующими формулами, выведенными в § 14 для системы с одной степенью свободы, либо уравнениями гармонического баланса. Вывод этих уравнений в явном виде предоставляем читателю.

Остановимся еще на рассмотрении частного случая системы (22.2), часто встречающегося при решении практически важных задач, когда возмущающие обобщенные силы имеют вид:

$$\begin{aligned} Q_r(\theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \\ &= \varepsilon Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \varepsilon E_r \sin \theta \quad (22.26) \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

и, следовательно, колебания описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} \dot{q}_r) &= \varepsilon Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \varepsilon E_r \sin \theta \quad (22.27) \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Будем рассматривать основной резонанс ( $p = 1, q = 1$ ), причем для упрощения остановимся на исследовании только первого приближения.

Согласно общему методу, изложенному выше, частным решением системы (22.27), соответствующим одиночстотным колебаниям, близким к первому нормальному, в первом приближении будет:

$$\begin{aligned} q_s &= \varphi_s^{(1)} a \cos(\theta + \vartheta) \quad (22.28) \\ &\quad (s = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

где функции времени  $a$  и  $\vartheta$  должны быть определены из системы урав-

нений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\pi m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \phi) \varphi_r^{(1)} \sin \phi d\phi - \\ &\quad - \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}}{m_1(\omega_1 + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - \nu - \frac{1}{2\pi m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \phi) \varphi_r^{(1)} \cos \phi d\phi + \\ &\quad + \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}}{m_1 a (\omega_1 + \nu)} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

в которой, как и выше,  $\omega_1$  — собственная частота невозмущенной системы,  $\varphi_r^{(1)}$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) — нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений (22.15), а

$$Q_{r0}^{(1)}(a, \phi) = Q_{r0}^{(1)}(\varphi_1^{(1)} a \cos \phi, \dots, -\varphi_1^{(1)} a \omega_1 \sin \phi, \dots) \\ (\theta + \vartheta = \phi) \quad (r = 1, 2, \dots, N).$$

Упростим несколько систему (22.29). Для этого по аналогии с § 15 введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi a \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \phi) \varphi_r^{(1)} \sin \phi d\phi, \\ \omega_e^{(1)}(a) &= \omega_1 - \frac{1}{2\pi a m_1 \omega_1} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)}(a, \phi) \varphi_r^{(1)} \cos \phi d\phi, \\ E^{(1)} &= \sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

Тогда уравнения первого приближения (22.29) могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a) a - \frac{E^{(1)}}{m_1(\omega_1 + \nu)} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a) - \nu + \frac{E^{(1)}}{m_1 a (\omega_1 + \nu)} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (22.31)$$

где  $\delta_e^{(1)}(a) = \frac{\lambda_e^{(1)}(a)}{2m_1}$ .

Введенные здесь параметры  $\lambda_e^{(1)}(a)$  и  $\omega_e^{(1)}(a)$  представляют собой соответственно эквивалентный коэффициент затухания и полную эквивалентную собственную частоту колебательной системы, описываемой уравнением вида

$$m_1 \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x \right) = \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_{r0}^{(1)} \varphi_r^{(1)},$$

аналогия с которым уже проводилась нами выше.

Таким образом, и в этом частном случае уравнения первого приближения (можно показать то же самое и для уравнений высшего приближения), составленные при исследовании резонансного случая в системах с  $N$  степенями свободы, будут такими же, как и для системы с одной степенью свободы (с массой  $m_1$  и собственной частотой  $\omega_1$ ), находящейся под воздействием возмущающей силы  $\sum_{r=1}^N \varepsilon Q_r^{(1)} \varphi_r^{(1)}$  (обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату) и возмущающей синусоидальной силы с амплитудой  $\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}$  (см. формулу (15.7)).

Остановимся на исследовании стационарных режимов колебаний с постоянными амплитудами и фазами.

Приравнивая правые части уравнений первого приближения (22.25) нулю, получим для определения стационарных значений амплитуды  $a$  и фазы  $\vartheta$  систему

$$\left. \begin{aligned} \delta_e^{(1)}(a) a + \frac{E^{(1)}}{m_1(\omega_1 + \nu)} \cos \vartheta &= 0, \\ \omega_e^{(1)}(a) - \nu + \frac{E^{(1)}}{m_1 a (\omega_1 + \nu)} \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.32)$$

Исключая из этих уравнений  $\vartheta$ , находим с точностью до величин второго порядка малости зависимость между амплитудой  $a$  и частотой внешних сил  $\nu$ :

$$m_1^2 a^2 [(\omega_e^{(1)}(a) - \nu)^2 + 4 \delta_e^{(1)}(a) \nu^2] = E^{(1)}^2. \quad (22.33)$$

Полученное уравнение совпадает по своей структуре с уравнением (15.10), составленным для нелинейной системы с одной степенью свободы, и потому в нашем случае для составления уравнения (22.33) мы можем воспользоваться правилом, сформулированным в § 15. В нашем случае это правило будет заключаться в следующем.

Пусть колебания некоторой системы, имеющей  $N$  степеней свободы, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений типа (22.27), и пусть частота внешних сил  $\nu$  близка к основной собственной частоте невозмущенной системы  $\omega_1$ . Требуется найти значения амплитуды и фазы стационарных одночастотных колебаний. Для этого рассматриваем колебательную систему с одной степенью свободы, с массой  $m_1$  и собственной частотой  $\omega_1$ , находящуюся под воздействием силы  $\sum_{r=1}^N \varepsilon Q_r^{(1)} \varphi_r^{(1)}$  (обобщенной силы, действующей на первую нормальную координату). Линеаризируя эту систему, определяем эквивалентный декремент затухания  $\delta_e^{(1)}(a)$  и эквивалентную частоту собственных колебаний  $\omega_e^{(1)}(a)$  как функции амплитуды и найденные значения подставляем в классические соотношения линейной теории вынужденных колебаний (22.32) и (22.33), причем амплитуда вынуждающей синусоидальной силы находится по формуле  $E^{(1)} = \sum_{r=1}^N \varepsilon E_r \varphi_r^{(1)}$ , т. е. опять-таки она является обобщенной силой, действующей на первую нормальную координату.

Для определения стационарных значений фазы колебания из соотношений (22.32) получаем формулу

$$\vartheta = \arctg \frac{\omega_e^{(1)}(a) - \nu}{2\nu\delta_e^{(1)}(a)}. \quad (22.34)$$

При помощи соотношения (22.33) мы можем построить резонансную кривую, характеризующую резонансные колебания, возникающие в нашей системе со многими степенями свободы в результате воздействия внешней синусоидальной силы, частота которой близка к одной из собственных частот системы.

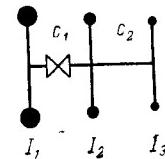
Для определения устойчивых и неустойчивых участков этой резонансной кривой мы получаем правила, аналогичные правилам, приведенным в § 15.

Так, условиями устойчивости (с точностью до величин первого порядка малости включительно) будут неравенства

$$\left. \begin{array}{l} \frac{da}{dt} > 0, \text{ если } \omega_e^{(1)}(a) > \nu, \\ \frac{da}{dt} < 0, \text{ если } \omega_e^{(1)}(a) < \nu. \end{array} \right\} \quad (22.35)$$

В качестве примера применения полученных результатов остановимся на исследовании вынужденных колебаний в конкретной механической системе со многими степенями свободы.

Рассмотрим приведенную систему коленчатого вала, изображенную на рис. 118, где на участке между первой и второй массами имеется нелинейная связь. Предположим для упрощения, что на среднюю массу действует периодический крутящий момент типа



$$M = E \sin \theta,$$

Рис. 118.

где  $E = \text{const}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \nu$  — частота момента, пропорциональная числу оборотов двигателя, а моменты, действующие на массы, расположенные на концах приведенного вала, равны нулю.

Обозначим моменты инерции масс двигателя через  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , а углы отклонения от равномерного вращения через  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ .

Тогда жесткость участка вала между первой и второй массами зависит от характеристики нелинейной муфты. Жесткость участка вала между второй и третьей массами обозначим через  $c_2$ . Упругий момент, зависящий от разности углов поворота прилегающих масс, для первого участка будет:

$$F(\varphi_2 - \varphi_1) = c'_1(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где функция  $\varepsilon f(\varphi_2 - \varphi_1)$  определяется конкретно заданной характеристикой нелинейной муфты, а  $c'_1$  — некоторая постоянная; для второго участка упругий момент будет:

$$c_2(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Предположим также, что на втором участке вала учитывается внутреннее трение, которое будем считать пропорциональным скорости (с коэффициентом пропорциональности  $\alpha$ ).

Тогда уравнения крутильных колебаний рассматриваемой системы будут:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \ddot{\varphi}_1 - F(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_2 - \varphi_1) - c_2(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1) = M + \alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2), \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) = -\alpha(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2). \end{array} \right\} \quad (22.36)$$

Вводя обозначения:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = q_1, \quad \varphi_3 - \varphi_2 = q_2,$$

уравнения (22.36) можно привести к следующей системе двух уравнений второго порядка (одну степень свободы — вращение, мы исключаем из рассмотрения):

$$\left. \begin{array}{l} I_2 \ddot{q}_1 + c'_1 \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} \right) q_1 - c_2 q_2 = - \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} \right) \varepsilon f(q_1) + \alpha \dot{q}_2 + E \sin \theta, \\ I_2 \ddot{q}_2 - c'_1 q_1 + c_2 \left( 1 + \frac{I_2}{I_3} \right) q_2 = \varepsilon f(q_1) - \alpha \left( 1 + \frac{I_2}{I_3} \right) \dot{q}_2 - E \sin \theta. \end{array} \right\} \quad (22.37)$$

Допустим, что нелинейность, коэффициент трения и амплитуда внешнего момента малы, а также, что для системы (22.37) выполняются условия, приведенные в § 21 (стр. 261).

Предположим также, что частота внепланой синусоидальной силы  $\omega$  близка к первой собственной частоте  $\omega_1$ ; в этом случае, естественно, в системе будут возбуждаться колебания, соответствующие первому нормальному колебанию с частотой, близкой к  $\omega_1$ , в то время как колебания с частотой  $\omega_2$ , находясь вне резонанса, из-за наличия трения будут затухать.

Тогда согласно (22.28) частным решением системы (22.37), соответствующим одночастотному режиму, близкому к первому нормальному колебанию, будет:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \varphi_1^{(1)} a \cos(\theta + \delta), \\ q_2 = \varphi_2^{(1)} a \cos(\theta + \delta), \end{array} \right\} \quad (22.38)$$

где  $\varphi_1^{(1)}$  и  $\varphi_2^{(1)}$  — фундаментальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \left[ c'_1 \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} \right) - \omega_1^2 I_2 \right] \varphi_1^{(1)} - c_2 \varphi_2^{(1)} = 0, \\ -c'_1 \varphi_1^{(1)} + \left[ c_2 \left( 1 + \frac{I_2}{I_3} \right) - \omega_1^2 I_2 \right] \varphi_2^{(1)} = 0; \end{array} \right\} \quad (22.39)$$

$\omega_1$  — корень частотного уравнения «невозмущенной» системы:

$$\left| \begin{array}{cc} c'_1 \left( 1 + \frac{I_2}{I_1} \right) - \omega^2 I_2 & -c_2 \\ -c'_1 & c_2 \left( 1 + \frac{I_2}{I_3} \right) - \omega^2 I_2 \end{array} \right| = 0, \quad (22.40)$$

а  $a$  и  $\delta$  должны быть определены или из уравнений первого приближения, или для стационарного режима по формулам типа (22.33) и (22.34), которые мы сейчас и составим, воспользовавшись схемой, приведенной на стр. 278.

Находим:

$$m_1 = I_2 (\varphi_1^{(1)}{}^2 + \varphi_2^{(1)}{}^2), \quad (22.41)$$

$$\dot{\varphi}_e^{(1)}(a) = \frac{\alpha}{m_1} \left[ \left( \frac{I_2}{I_3} + 1 \right) \varphi_2^{(1)}{}^2 - \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)} \right], \quad (22.42)$$

$$\omega_e^{(1)}(a) = \omega_1 - \frac{\varepsilon \left[ \varphi_2^{(1)} - \left( 1 - \frac{I_2}{I_1} \right) \varphi_1^{(1)} \right]}{2\pi m_1 \omega_1 a} \int_0^{2\pi} f(\varphi_1^{(1)} a \cos \phi) \cos \phi d\phi, \quad (22.43)$$

$$E^{(1)} = E(\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}). \quad (22.44)$$

Подставляя эти выражения в формулы (22.39), получаем зависимость, при помощи которой легко можно построить резонансную кривую.

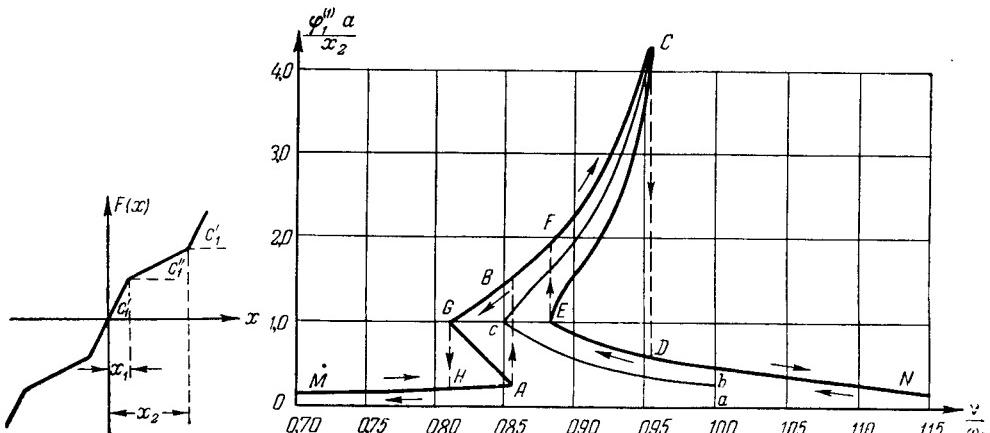


Рис. 119.

Рис. 120.

Так, например, в случае, если характеристика нелинейной упругой муфты имеет вид, представленный на рис. 119, то резонансная кривая будет такая, как на рис. 120.

### § 23. Исследование одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы при наличии медленно меняющихся параметров

Как уже указывалось выше, во многих актуальных проблемах вибротехники мы встречаемся с колебательными системами со многими степенями свободы, в которых ряд параметров (эффективные собственные и внешние частоты, амплитуды вынуждающих сил и т. д.) медленно изменяются, причем медленно в указанном выше смысле — по сравнению с периодом собственных колебаний.

В настоящем параграфе мы остановимся на построении асимптотических разложений для дифференциальных уравнений, описывающих колебания в таких системах, в предположении, что в системе совершается одночастотный колебательный процесс.

Как и в предыдущих параграфах, систему дифференциальных уравнений будем рассматривать в таком виде, когда невозмущенная система соответствует обычной схеме теории малых колебаний.

Итак, рассмотрим колебательную систему с  $N$  степенями свободы, кинетическая и потенциальная энергия которой могут быть представлены в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N c_{rs}(\tau) q_r q_s, \quad (23.1)$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_N$  — обобщенные координаты,  $\tau = \varepsilon t$  — «медленное» время,  $\varepsilon$ , как и всегда, — малый положительный параметр,  $a_{rs}(\tau) = a_{sr}(\tau)$ ,  $c_{rs}(\tau) = c_{sr}(\tau)$  ( $s, r = 1, 2, \dots, N$ ) — некоторые функции «медленного» времени  $\tau$ , обладающие производными любого порядка при всех конечных значениях  $\tau$ .

Предположим также, что на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ , где  $T = \frac{L}{\varepsilon}$ , причем  $L$  может быть сделано сколь угодно большим для сколь угодно малых  $\varepsilon$ , квадратичные формулы  $T$  и  $V$  определенно положительны.

Пусть исследуемая колебательная система находится под воздействием малого возмущения, определяемого обобщенными силами

$$\begin{aligned} Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) &= \varepsilon Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \\ &+ \varepsilon^2 Q_r^{(2)}(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) + \dots \quad (23.2) \\ &(r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

периодическими по  $\theta$  с периодом  $2\pi$  и разлагающимися в конечные суммы Фурье, с коэффициентами, являющими некоторыми полиномами по отношению к  $q_s$ ,  $\dot{q}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ). Кроме того, будем полагать, что  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$  и функции  $\nu(\tau)$ ,  $Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon)$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) неограниченно дифференцируемы по  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$ .

Тогда, согласно известным принципам механики, мы приходим к рассмотрению системы  $N$  нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s = Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) \quad (23.3)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Одновременно с системой (23.3) рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \ddot{q}_s + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (23.4)$$

для получения которой необходимо в (23.3) положить  $\varepsilon = 0$ , а  $\tau$  рассматривать не как  $\varepsilon t$ , а как некоторый постоянный параметр.

В нашем случае вспомогательная система (23.4) играет такую же роль, как и система (23.3), и мы ее в дальнейшем будем называть системой дифференциальных уравнений невозмущенного движения или просто невозмущенной системой уравнений.

Как и в § 21, при помощи обычных методов можно для уравнений (23.4) построить решения, соответствующие нормальным колебаниям

$$q_s^{(k)} = \varphi_s^{(k)}(\tau) a \cos(\omega_k(\tau) t + \alpha_k) \quad (s, k = 1, 2, \dots, N), \quad (23.5)$$

где  $\omega_k(\tau)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) — собственные частоты, определяемые уравнением

$$D \| -a_{rs}(\tau) \omega^2 + c_{rs}(\tau) \| = 0, \quad (23.6)$$

а  $\varphi_s^{(k)}(\tau)$  ( $s, k = 1, 2, \dots, N$ ) — нормальные функции, являющиеся нетривиальными решениями систем однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^N \{ -a_{rs}(\tau) \omega_k^2(\tau) + c_{rs}(\tau) \} \varphi_s^{(k)}(\tau) = 0 \quad (23.7)$$

$$(r, k = 1, 2, \dots, N)$$

и обладающие свойством ортогональности

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{s, r=1}^N a_{rs}(\tau) \varphi_s^{(k)}(\tau) \varphi_r^{(l)}(\tau) = 0, \\ \sum_{r, s=1}^N c_{rs}(\tau) \varphi_s^{(k)}(\tau) \varphi_r^{(l)}(\tau) = 0 \end{array} \right\} \quad (23.8)$$

$$(k \neq l).$$

Во всех последних формулах величины  $\omega_k(\tau)$  и  $\varphi_s^{(k)}(\tau)$  ( $s, k = 1, 2, \dots, N$ ) зависят от  $\tau$  как от параметра.

Если же теперь положить в (23.4) и (23.5)  $\tau = \varepsilon t$ , то функции (23.5) будут только приближенно (с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon$ ) удовлетворять уравнениям (23.4), представляя собой колебания с медленно меняющимися частотой и формой.

Прежде чем приступить к построению асимптотических решений системы (23.3), соответствующих одночастотным колебаниям, близким (при достаточно малом  $\varepsilon$ ) к одному из нормальных невозмущенных колебаний (23.5) (для определенности опять будем полагать к первому нормальному колебанию), допустим, что для всех значений параметра  $\tau$ , принадлежащих рассматриваемому интервалу  $0 \leq \tau \leq L$ , выполняются условия, аналогичные условиям, приведенным в § 21 на стр. 261, т. е. допустим, что: 1) в невозмущенной системе, описываемой дифференциальными уравнениями (23.4), возможны незатухающие гармонические колебания с частотой  $\omega_1(\tau)$ , зависящие только от двух произвольных постоянных; 2) единственным решением системы (23.4), соответствующим равновесию, является тривиальное решение  $q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0$ ; 3) частота  $\omega_1(\tau)$ , а также ни один из ее обертонаов  $2\omega_1(\tau), 3\omega_1(\tau), \dots, k\omega_1(\tau), \dots$  не равны собственным частотам  $\omega_2(\tau), \omega_3(\tau), \dots, \omega_N(\tau)$  невозмущенной системы.

При этих допущениях, естественно, согласно методике предыдущих параграфов и учитывая результаты, полученные в § 14, для системы с одной степенью свободы, искать решение возмущенных уравнений (23.3) в случае  $p = q = 1$ , т. е. соответствующее основному резонансу (резонансу с собственной частотой  $\omega_1(\tau)$ ) в виде асимптотических рядов \*):

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(\theta + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) + \dots \quad (**),$$

$$(s = 1, 2, \dots, N), \quad (23.9)$$

\*) Как уже указывалось, все рассуждения могут быть без существенных изменений перенесены на общий случай  $\omega_1(\tau) \approx \frac{p}{q} v(\tau)$ , где  $p$  и  $q$  — некоторые взаимно простые числа.

\*\*) В дальнейшем верхний индекс у  $q_s$  будем опускать, помня, что мы рассматриваем колебания, близкие к первому нормальному колебанию.

в которых  $\tau = \varepsilon t$ , функции  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ ,  $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$ , ..., ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) — периодические по  $\theta$  и  $\theta + \vartheta$  с периодом  $2\pi$ , а величины  $a$  и  $\vartheta$ , как функции времени, определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau) - v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

где  $\omega_1(\tau)$  — наименьший корень уравнения (23.6);  $\varphi_s^{(1)}(\tau)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) — нетривиальные решения алгебраических уравнений (23.7).

Как и обычно, для решения нашей задачи необходимо найти такие выражения для функций:

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta), u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta), \dots \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (23.11)$$

и

$$A_1(\tau, a, \vartheta), A_2(\tau, a, \vartheta), \dots, B_1(\tau, a, \vartheta), B_2(\tau, a, \vartheta), \dots, \quad (23.12)$$

чтобы асимптотические ряды (23.9) после подстановки в них вместо  $a$  и  $\vartheta$  функций времени, определяемых уравнениями (23.10), являлись решением системы (23.3).

Функции (23.11) и (23.12) можно найти, применив ту же методику, что и в предыдущих параграфах, т. е. воспользовавшись формальным правилом, полученным в § 20, и проводя аналогию с результатами, полученными для системы с одной степенью свободы. Однако при применении принципа гармонического баланса в рассматриваемом случае следует помнить, что у нас параметры не постоянны, а зависят от  $\tau = \varepsilon t$ , и поэтому при дифференцировании надо всегда помнить, что  $\tau = \varepsilon t$ , а при интегрировании  $\tau$  считать постоянным параметром. Приведем подробные выкладки.

Дифференцируя ряды (23.9) с учетом того, что  $a$  и  $\vartheta$  должны удовлетворять уравнениям (23.10), найдем выражения для  $q_s, \dot{q}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ). Подставим полученные выражения в систему уравнений (23.3), правые части которой тоже разложим в ряды по степеням  $\varepsilon$ . Приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим ряд систем:

$$\sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[ \omega_1^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \psi^2} + 2v(\tau) \omega_1(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \theta \partial \psi} + v^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \theta^2} \right] + \right. \\ \left. + c_{rs}(\tau) u_s^{(1)} \right\} = G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) \quad (23.13)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N),$$

$$\sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[ \omega_1^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial \psi^2} + 2v(\tau) \omega_1(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial \theta \partial \psi} + v^2(\tau) \frac{\partial^2 u_s^{(2)}}{\partial \theta^2} \right] + \right. \\ \left. + c_{rs}(\tau) u_s^{(2)} \right\} = G_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) \quad (23.14)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N),$$

в которых введены обозначения:

$$\begin{aligned}
G_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) &= Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) - \\
&- \sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[ \varphi_s^{(1)}(\tau) (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) a B_1 \right] \cos \psi - \right. \\
&- a_{rs}(\tau) \left[ \varphi_s^{(1)}(\tau) a (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2\varphi_s^{(1)}(\tau) \omega_1(\tau) A_1 \right] \sin \psi - \\
&\left. - \left[ 2\omega_1(\tau) \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} a_{rs}(\tau) + \frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau} \varphi_s'(\tau) a_{rs}(\tau) + \omega_1(\tau) \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} \right] a \sin \psi \right\}. \tag{23.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) = & \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) - \sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[ \varphi_s^{(1)}(\tau)(\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - \right. \right. \\
& - 2\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)aB_2 + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - \\
& - \varphi_s^{(1)}(\tau) aB_1^2 \Big] \cos \psi - a_{rs}(\tau) \left[ \varphi_s^{(1)}(\tau)(\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + 2\varphi_s^{(1)}(\tau)\omega_1(\tau)A_2 + \right. \\
& + 2\varphi_s^{(1)}(\tau)A_1B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau)a \frac{\partial B_1}{\partial \theta} B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{\partial B_1}{\partial \tau} \Big] \sin \psi + \\
& + \left[ a_{rs}(\tau) \frac{d^2\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau^2} a + \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} a + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} A_1 \right] \cos \psi - \\
& \left. \left. - \left[ 2 \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} a_{rs}(\tau) B_1 + \varphi_s^{(1)}(\tau) \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} B_1 \right] a \sin \psi \right\}, \quad (23.16)
\end{aligned}$$

где также обозначено:

$$\begin{aligned} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) &= Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_{10}, \dots, q_{N_0}, \dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{N_0}), \\ \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) &= Q_{r0}^{(2)}(\tau, \theta, q_{10}, \dots, q_{N_0}, \dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{N_0}) + \sum_{s=1}^N \left[ \frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial q_s} u_s^{(1)} + \right. \\ &+ \frac{\partial Q_r^{(1)}}{\partial \dot{q}_s} \left( \frac{d\varphi_s^{(1)}(\tau)}{d\tau} a \cos \psi + \varphi_s^{(1)}(\tau) \cos \psi A_1 - \varphi_s^{(1)}(\tau) a \sin \psi B_1 \right) + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \theta} \nu(\tau) + \\ &+ \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1(\tau) \Big] - \sum_{s=1}^N \left\{ a_{rs}(\tau) \left[ 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \tau \partial \dot{\psi}} \omega_1(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \tau \partial \theta} \nu(\tau) + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial a \partial \theta} \nu(\tau) A_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \theta \partial \psi} \nu(\tau) B_1 + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial \dot{\psi}^2} \omega_1(\tau) B_1 + 2 \frac{\partial^2 u_s^{(1)}}{\partial a \partial \psi} \omega_1(\tau) A_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \dot{\psi}} (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial a} (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \theta} \frac{d\nu(\tau)}{d\tau} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau} \right] + \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \theta} \nu(\tau) + \frac{da_{rs}(\tau)}{d\tau} \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial \psi} \omega_1(\tau) \right\} \\ &\quad (r = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

$$\psi = \theta + \vartheta, \quad q_{s0} = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos \psi, \quad \dot{q}_{s0} = -\varphi_s^{(1)}(\tau) w_1(\tau) a \sin \psi \\ (s=1, 2, \dots, N).$$

Определим из системы (23.13)  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ). Для этого правые части системы (23.13) как периодические функции  $\theta$  и  $\phi$  целесообразно разложить в ряды Фурье:

$$G_{r_0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = \sum_{n, m} g_{n, m}^{(r, 1)}(\tau, a) e^{i(n\theta + m\psi)}, \quad (23.17)$$

где

$$g_{n, m}^{(r, 1)}(\tau, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{r_0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi \quad (23.18)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Искомые функции  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) также естественно представить в виде рядов

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = \sum_{n, m} k_{n, m}^{(s)}(\tau, a) e^{i(n\theta + m\psi)} \quad (23.19)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Подставляя значения  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) и  $G_{r_0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) (при подстановке считаем, что  $\tau$  — параметр) в уравнения (23.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем для определения коэффициентов  $k_{n, m}^{(s)}(\tau, a)$  систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^N \{a_{rs}(\tau) [-\omega_1^2(\tau) m^2 - 2\nu(\tau) \omega_1(\tau) mn - \nu^2(\tau) n^2] + c_{rs}(\tau)\} k_{n, m}^{(s)}(\tau, a) = \\ = g_{n, m}^{(r, 1)}(\tau, a) \quad (23.20)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Решая эту систему, как и в предыдущем параграфе, с помощью введения нормальных координат находим:

$$k_{n, m}^{(s)}(\tau, a) = \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)}(\tau) \frac{\sum_{r=1}^N g_{n, m}^{(r, 1)}(\tau, a) \varphi_r^{(j)}(\tau)}{m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - (\omega_1(\tau) m + \nu(\tau) n)^2]} \quad (23.21)$$

и, следовательно, для  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) получаем следующие выражения:

$$u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) = \sum_{n, m} \sum_{j=1}^N \varphi_s^{(j)}(\tau) \frac{\sum_{r=1}^N g_{n, m}^{(r, 1)}(\tau, a) \varphi_r^{(j)}(\tau) e^{i(n\theta + m\psi)}}{m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - (\omega_1(\tau) m + \nu(\tau) n)^2]} \quad (23.22)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N).$$

Для того чтобы  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) были конечны, необходимо, чтобы для любых  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$  знаменатели в правых частях (23.22) не обращались в нуль. Однако знаменатели могут обратиться в нуль для тех  $n$  и  $m$ , для которых выполняются

равенства:

$$m\omega_1(\tau) + nv(\tau) = \pm \omega_1(\tau) \quad (23.23)$$

или

$$n + m \pm 1 = 0, \quad (23.24)$$

так как ввиду того, что мы рассматриваем основной резонанс, при некотором  $\tau (0 < \tau \leq L)$  возможно  $\omega_1(\tau) = v(\tau)$ .

Поэтому условие конечности для  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) принимает следующий вид:

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (n+m \pm 1=0)}}^N g_{n, m}^{(r, 1)}(\tau, a) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{i(n\theta + m\phi)} = 0. \quad (23.25)$$

Принимая во внимание (23.18), (23.22) и (23.25), после ряда преобразований получаем «регуляризованное» выражение для  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi) = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{n, m \\ (nq+p(m \pm 1) \neq 0 \\ \text{для } j=1)}}^N \varphi_s^{(j)}(\tau) \times \\ & \times \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi) \varphi_r^{(j)}(\tau) e^{-i(n\theta + m\phi)} d\theta d\psi}{m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - (\omega_1(\tau)m + v(\tau)n)^2]} e^{i(n\theta + m\phi)} - \\ & - 2\omega_1(\tau) a \sum_{j=2}^N \frac{\sum_{r=1}^N \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial T(q)}{\partial q_r} \right]_{\dot{q}_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)} \varphi_r^{(j)}(\tau)}{m_j(\tau) [\omega_j^2(\tau) - \omega_1^2(\tau)]} \sin \phi \quad (23.26) \\ & (s = 1, 2, \dots, N), \end{aligned}$$

где

$$m_j(\tau) = \sum_{r, s=1}^N a_{rs}(\tau) \varphi_r^{(j)}(\tau) \varphi_s^{(j)}(\tau) = 2T[\varphi^{(j)}(\tau)]$$

и, следовательно,

$$\left[ \frac{\partial T(q)}{\partial q_r} \right]_{\dot{q}_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)} = \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \varphi_s^{(1)}(\tau) \quad (r = 1, 2, \dots, N).$$

Не представляет затруднений сформулировать правило составления «регуляризованных» выражений для  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), исходя непосредственно из выражений возмущающих сил и выражений для кинетической и потенциальной энергии.

Заметим, что сумма  $\sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi) \varphi_r^{(j)}(\tau)$  представляет собой обобщенную силу, действующую на  $j$ -ю нормальную координату. Выражение  $\sum_{r=1}^N \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial T(q)}{\partial q_r} \right]_{\dot{q}_s=\varphi_s^{(1)}(\tau)} \varphi_r^{(j)}(\tau)$  также можно интерпретировать

как обобщенную силу, действующую на  $j$ -ю нормальную координату. Наличие этой дополнительной силы объясняется появлением (в результате зависимости инерционных коэффициентов  $a_{ij}$  от «медленного» времени  $\tau$ ) «силы»  $\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_r} \right]_{\dot{q}_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)}$ .

Таким образом, для получения функций  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) надо подставить в функции  $Q_r^{(1)}(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) нулевые приближения  $q_s$ ,  $\dot{q}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) и найти ( $n, m$ )-й член в ряде Фурье для обобщенной силы, действующей на  $j$ -ю нормальную координату; далее, надо найти производную кинетической энергии по скорости, заменить в ней  $\dot{q}_s$  на  $\varphi_s^{(1)}(\tau)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), после чего полученные выражения подставить в формулу (23.26). Величины  $m_j(\tau)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) представляют собой удвоенные формы кинетической энергии, в которых скорости  $\dot{q}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) заменены «нормальными» функциями  $\varphi_s^{(j)}(\tau)$  ( $s, j = 1, 2, \dots, N$ ).

Перейдем к определению функций  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ , которые, как и обычно, определяются так, чтобы выполнялось условие конечности (23.25).

Вводя обозначения  $n = -\sigma$ ,  $m \pm 1 = \sigma$ , условие (23.25) представляем в виде

$$\sum_{r=1}^N g_{-\sigma p, \pm q \pm 1}^{(r, 1)}(\tau, a) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{\pm i\psi + i\sigma\vartheta} = 0 \quad (23.27)$$

$(-\infty < \sigma < \infty).$

Подставляя сюда значения  $g_{-\sigma, \pm 1}^{(r, 1)}(\tau, a)$  согласно (23.18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему уравнений для  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ , аналогичную системе (19.8):

$$\begin{aligned} (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega_1(\tau) B_1 &= \\ = \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{-i\sigma\vartheta'} \cos \psi d\theta d\psi; \\ (\omega_1(\tau) - \nu(\tau)) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega_1(\tau) A_1 &= -\frac{a}{m_1(\tau)} \frac{d(m_1(\tau) \omega_1(\tau))}{d\tau} - \\ - \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \vartheta, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{-i\sigma\vartheta'} \sin \psi d\theta d\psi \\ (\vartheta' = \psi - \theta). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (23.28)$$

После того как нами найдены выражения для  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ),  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ , становятся известными правые части уравнений (23.14), из которых находим функции  $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), а из условий конечности

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (n+m \pm 1=0)}}^N g_{n, m}^{(r, 2)}(\tau, a) \varphi_r^{(1)}(\tau) e^{i(n\theta + m\psi)} = 0 \quad (23.29)$$

находим  $A_2(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_2(\tau, a, \vartheta)$ . После ряда выкладок получаем для определения  $A_2(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_2(\tau, a, \vartheta)$  систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1(\tau) - v(\tau)) \frac{\partial A_2}{\partial \vartheta} - 2a\omega_1(\tau)B_2 = & - \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \right. \\ & \left. + \frac{dm_1(\tau)}{d\tau} \frac{A_1}{m_1(\tau)} - \frac{\gamma(\tau) a}{m_1(\tau)} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \phi) \varphi_r^{(j)}(\tau) e^{-i\sigma\theta} \cos \phi d\theta d\phi, \\ (\omega_1(\tau) - v(\tau)) a \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} + 2\omega_1(\tau)A_2 = & - \left\{ a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} B_1 + \right. \\ & \left. + a \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + 2A_1 B_1 + \frac{dm_1(\tau)}{d\tau} a \frac{B_1}{m_1(\tau)} \right\} - \\ & - \frac{1}{2\pi^2 m_1(\tau)} \sum_{\sigma} e^{i\sigma\vartheta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N \Phi_{r0}^{(2)}(\tau, a, \theta, \phi) e^{-i\sigma\theta} \sin \phi d\theta d\phi, \end{aligned} \right\} \quad (23.30)$$

где обозначено:

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=1}^N \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial T(q)}{\partial q_j} \right]_{q_i=\varphi_i^{(1)}(\tau)} \varphi_j^{(1)}(\tau). \quad (23.31)$$

После того как нами найдены функции  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \phi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ),  $A_1(\tau, a, \vartheta)$ ,  $A_2(\tau, a, \vartheta)$ ,  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ ,  $B_2(\tau, a, \vartheta)$ , мы можем построить решения уравнений (23.3), соответствующие одночастотному режиму, как в первом, так и во втором приближении.

Резюмируя изложенное, приведем схему построения первого и второго приближения для частных двупараметрических решений системы (23.3), соответствующих одночастотному режиму.

Заметим, что эта схема при  $\tau = \text{const}$  может быть также применена и к результатам предыдущего параграфа, в котором ради краткости мы не останавливались на приведении такой схемы.

Итак, прежде всего выделяем невозмущенную систему (23.4) и проверяем, возможны ли в ней при любых значениях параметра  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq L$ ) незатухающие гармонические собственные колебания с частотой  $\omega_1(\tau)$ , зависящие от двух произвольных постоянных; проверяем также, отсутствуют ли нетривиальные статические решения и внутренний резонанс. Далее, находим собственные частоты  $\omega_k(\tau)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) и собственные функции  $\varphi_s^{(1)}(\tau)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), причем при определении их считаем, что коэффициенты соответствующих алгебраических уравнений зависят от  $\tau$  как от некоторого постоянного параметра.

После этого в качестве первого приближения берем выражения

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(\theta + \vartheta) \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (23.32)$$

в которых  $a$  и  $\vartheta$  являются некоторыми функциями времени, определяемыми из уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau) - v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (23.33)$$

где  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$  — частные периодические по  $\vartheta$  решения системы (23.28).

В качестве второго приближения принимаем выражения:

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(\theta + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) \quad (23.34)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

где  $a$  и  $\vartheta$  определяются из уравнений второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (23.35)$$

в которых  $A_1(\tau, a, \vartheta)$ ,  $B_1(\tau, a, \vartheta)$ ,  $A_2(\tau, a, \vartheta)$ ,  $B_2(\tau, a, \vartheta)$  находим из систем (23.28) и (23.30), а  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) по формулам (23.26).

Итак, интегрирование системы (23.3) сведено нами к интегрированию уравнений (23.33) или (23.35), которые, как уже указывалось в общем случае, не интегрируются в замкнутом виде, и их приходится интегрировать численными методами. В § 19 указывалось на преимущество численного интегрирования системы уравнений, определяющей  $a$  и  $\vartheta$ , по сравнению с численным интегрированием непосредственно уравнений движения. В данном же случае это преимущество во много раз увеличивается ввиду того, что мы при численном интегрировании рассматриваем не систему  $N$  уравнений второго порядка, а только два уравнения первого порядка.

Рассмотрим некоторые частные случаи системы нелинейных дифференциальных уравнений (23.3), для которых уравнения первого приближения принимают особенно простой вид.

В качестве первого частного случая рассмотрим «свободные» одночастотные колебания системы со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами, т. е. когда правые части уравнений (23.3) не зависят от  $\theta$  и имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s = Q_r(\tau, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) \quad (23.36)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

В этом случае приближенное двупараметрическое частное решение в первом приближении будет:

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos \psi \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (23.37)$$

где  $a$  и  $\psi$  должны быть определены из системы уравнений первого приближения:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau) \omega_1(\tau)} \frac{d(m_1(\tau) \omega_1(\tau))}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau) \omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \sin \psi d\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_1(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau) \omega_1(\tau) a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \cos \psi d\psi, \quad (23.38)$$

которую получаем непосредственно из соотношений (23.28), в которых полагаем, что  $A_1$  и  $B_1$  зависят только от  $a$  и  $\tau$ .

Введем по аналогии с § 19 обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e^{(1)}(a, \tau) &= \frac{\varepsilon}{\omega_1(\tau)} \frac{d(m_1(\tau) \omega_1(\tau))}{d\tau} + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\pi a \omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \sin \psi d\psi, \\ \omega_e^{(1)}(a, \tau) &= \omega_1(\tau) - \frac{\varepsilon}{\pi a m_1(\tau) \omega_1(\tau)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \cos \psi d\psi; \end{aligned} \right\} \quad (23.39)$$

тогда уравнения первого приближения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a, \tau) a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (23.40)$$

где  $\delta_e^{(1)}(a, \tau) = \frac{\lambda_e^{(1)}(a, \tau)}{2m_1(\tau)}$ .

Таким образом, уравнения первого приближения для системы  $N$  дифференциальных уравнений (23.36) будут такими же, как и для системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением

$$m_1(\tau) \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2(\tau) x \right) = \varepsilon \sum_{r=1}^N Q_{r0}^{(1)}(\tau, \varphi_1^{(1)}x, \dots, \varphi_N^{(1)}x, \dot{\varphi}_1^{(1)}x, \dots, \dot{\varphi}_N^{(1)}x) \varphi_r^{(1)}(\tau). \quad (23.41)$$

Рассмотрим теперь случай, когда внешние возмущающие силы имеют следующий вид:

$$Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) = \varepsilon Q_r(\tau, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \varepsilon E_r(\tau) \sin \theta \quad (r = 1, 2, \dots, N), \quad (23.42)$$

где  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ .

Тогда система дифференциальных уравнений (23.3) будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s &= \varepsilon Q_r(\tau, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon E_r(\tau) \sin \theta \quad (r = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (23.43)$$

В случае рассматриваемого нами основного резонанса ( $p = 1, q = 1$ ) в первом приближении решения системы (23.43), соответствующие одночастотным колебаниям, близким к одному из нормальных, будут:

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(\theta + \delta) \quad (s = 1, 2, \dots, N), \quad (23.44)$$

где функции времени  $a$  и  $\delta$  должны быть определены из системы

уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{2m_1(\tau)\omega_1(\tau)} \frac{d(m_1(\tau)\omega_1(\tau))}{d\tau} - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau)} \times \\ &\quad \times \sum_{r=1}^N \int_0^{2\pi} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \sin \psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r(\tau) \varphi_r^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)(\omega_1(\tau) - v(\tau))} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1(\tau) - v(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m_1(\tau)\omega_1(\tau)} a \times \\ &\quad \times \sum_{r=1}^N \int_0^{2\pi} Q_{r0}^{(1)}(\tau, a, \psi) \varphi_r^{(1)}(\tau) \cos \psi d\psi + \frac{\sum_{r=1}^N \varepsilon E_r(\tau) \varphi_r^{(1)}(\tau)}{m_1(\tau)a(\omega_1(\tau) - v(\tau))} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (23.45)$$

которую, учитывая введенные обозначения (23.39), можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e^{(1)}(a, \tau) a - \frac{E(\tau)}{m_1(\tau)(\omega_1(\tau) - v(\tau))} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_e^{(1)}(a, \tau) - v(\tau) + \frac{E(\tau)}{m_1(\tau)a(\omega_1(\tau) - v(\tau))} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (23.46)$$

где обозначено:

$$E(\tau) = \varepsilon \sum_{r=1}^N E_r(\tau) \varphi_r^{(1)}(\tau).$$

Итак, для того чтобы составить уравнения первого приближения для системы с  $N$  степенями свободы при наличии одночастотного режима, мы должны воспользоваться правилом, приведенным в § 19 для колебательной системы с одной степенью свободы, описываемой следующим дифференциальным уравнением с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\begin{aligned} m_1(\tau) \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2(\tau) x \right) &= \sum_{r=1}^N \varepsilon Q_r^{(1)}(\tau, \varphi_1^{(1)}x, \dots, \varphi_N^{(1)}x, \dot{\varphi}_1^{(1)}x, \dots, \dot{\varphi}_N^{(1)}x) \varphi_r^{(1)}(\tau) + \\ &\quad + E(\tau) \sin \theta. \end{aligned} \quad (23.47)$$

Проиллюстрируем изложенную методику на простом примере. В качестве такого примера рассмотрим, как и в § 22, крутильные колебания вала, схематически изображенного на рис. 118, причем для упрощения предположим, что все параметры, характеризующие нашу колебательную систему, такие же, как и в § 22, и только внешний крутящий момент, действующий на среднюю массу, имеет вид

$$M = E \sin \theta, \quad (23.48)$$

где  $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau)$ .

Тогда наша задача, как и в § 22, сводится к построению приближенного решения системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 I_2 \ddot{x} + c_1(I_1 + I_2)x - c_2 I_1 y &= -(I_1 + I_2) \varepsilon f(x) + \alpha I_1 \dot{y} + EI_1 \sin \theta, \\ I_2 I_3 \ddot{y} - c_1(I_2 + I_3)x + c_2(I_2 + I_3)y &= I_3 \varepsilon f(x) - \alpha(I_2 + I_3) \dot{y} - I_3 E \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (23.49)$$

где  $\frac{d\theta}{dt} = v(\tau)$ .

Предположим, что частота внешней силы  $v(\tau)$ , которая медленно изменяется со временем, находится вблизи значений собственной частоты  $\omega_1$ . В этом случае представляет интерес рассмотреть нестационарные колебания системы, соответствующие возбуждению гармоник с частотой, близкой к  $\omega_1$ .

Приближенные решения ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1^{(1)} a \cos(\theta + \vartheta), \\ y &= \varphi_2^{(1)} a \cos(\theta + \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (23.50)$$

где  $\varphi_1^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$  — нетривиальные решения системы алгебраических уравнений (22.39),  $\omega_1$  — наименьший корень уравнения (22.40), а  $a$  и  $\vartheta$  как функции времени должны быть определены из уравнений первого приближения. Для составления этих уравнений можем воспользоваться правилом и формулами, приведенными в § 19 для колебательной системы с одной степенью свободы. Для этого вместо системы (23.49) рассматриваем эквивалентное ей при одночастотном режиме одно уравнение второго порядка:

$$m_1 \left( \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 z \right) = Q(z, \frac{dz}{dt}) + E_1 \sin \theta, \quad (23.51)$$

где введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= I_2 (\varphi_1^{(1)2} + \varphi_2^{(1)2}), \\ E_1 &= E (I_1 \varphi_1^{(1)} - I_2 \varphi_2^{(1)}), \\ Q(z, \frac{dz}{dt}) &= [I_3 \varphi_2^{(1)} - (I_1 + I_2) \varphi_1^{(1)}] \varepsilon f(\varphi_1^{(1)} z) + \\ &\quad + \alpha [(I_2 + I_3) \varphi_2^{(1)} - I_1 \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)}] \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (23.52)$$

Подставляя значения  $m_1$ ,  $E_1$  и  $Q(z, \frac{dz}{dt})$  ( $z = a \cos \psi$ ) непосредственно в формулы (19.22), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha}{m_1} [(I_2 + I_3) \varphi_2^{(1)2} - I_1 \varphi_1^{(1)} \varphi_2^{(1)}] a - \frac{E (I_1 \varphi_1^{(1)} - I_2 \varphi_2^{(1)})}{m_1 (\omega_1 + v(\tau))} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 - v(\tau) - \frac{[I_3 \varphi_2^{(1)} - (I_1 + I_2) \varphi_1^{(1)}]}{m_1 \omega_1 a} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon f(\varphi_1^{(1)} a \cos \psi) \cos \psi d\psi - \\ &\quad - \frac{E (I_1 \varphi_1^{(1)} - I_2 \varphi_2^{(1)})}{m_1 a (\omega_1 + v(\tau))} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (23.53)$$

Полагая, что нелинейность упругой связи определяется той же самой характеристикой, что в примере § 22, вычисляя интеграл, стоящий в правой части второго уравнения системы (23.53), и после этого численно интегрируя систему (23.53) при различных скоростях изменения частоты внешнего крутящего момента  $v(\tau)$ , получаем ряд кривых, приведенных на рис. 121, характеризующих изменение величины  $a$  в зависимости от изменения  $v(\tau)$ .

Заканчивая настоящую главу, посвященную исследованию одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы, заметим, что изложенная методика может быть без особого затруднения применена к исследованию более сложных колебательных систем, например к исследованию колебательных систем с  $N$  степенями

свободы, для которых функция Лагранжа может быть представлена в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r,s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \dot{q}_r + 2 \sum_{s,r=1}^N g_{sr}(\tau) q_r \dot{q}_s - \sum_{r,s=1}^N c_{rs}(\tau) q_s q_r \right\}, \quad (23.54)$$

где, как и выше,  $q_1, q_2, \dots, q_N$  — обобщенные координаты,  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $a_r(\tau) = a_{sr}(\tau)$ ,  $c_{rs}(\tau) = c_{sr}(\tau)$  и  $g_{sr}(\tau)$  ( $s, r = 1, 2, \dots, N$ ) имеют достаточное число производных при всех конечных  $\tau$ .

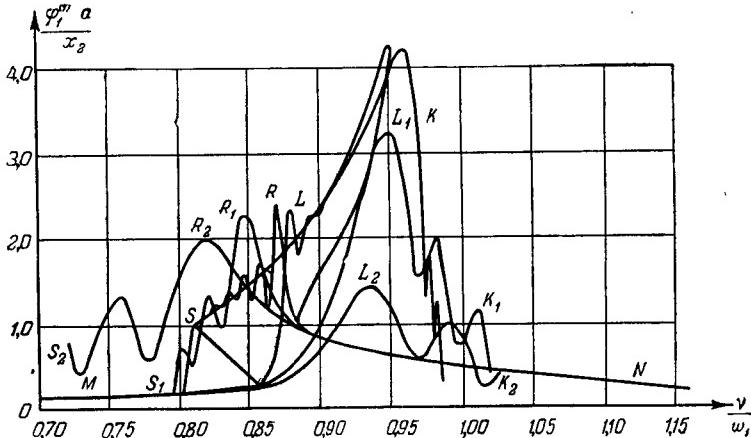


Рис. 121.

(Рассматривая  $\tau$  как постоянный параметр, мы получаем, что  $a_{sr}$ ,  $g_{sr}$ , и  $c_{sr}$  ( $s, r = 1, 2, \dots, N$ ) — постоянные и, следовательно, приходим к более общему случаю по сравнению с рассматриваемыми в §§ 21 — 22; если же  $\tau = et$ , то рассматриваемый случай будет более общим также и по сравнению с системами, рассмотренными в настоящем параграфе.)

Будем предполагать, что полная энергия рассматриваемой колебательной системы

$$H \doteq \sum_{s=1}^N \dot{q}_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} - \mathcal{L} \quad (23.55)$$

является определенно-положительной квадратичной формой для любых  $\tau$  на интервале  $0 \leq \tau \leq L$ , а сама система находится под воздействием внешних возмущающих сил типа (23.2). Тогда мы приходим к исследованию следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{sr}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N b_{sr}(\tau) \ddot{q}_s + \sum_{s=1}^N c_{sr}(\tau) q_s = \\ = Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) - \varepsilon \sum_{s=1}^N \frac{dg_{rs}(\tau)}{d\tau} q_s \quad (23.56) \end{aligned}$$

в которой  $b_{sr}(\tau) = g_{sr}(\tau) - g_{rs}(\tau)$  и, следовательно,

$$b_{sr}(\tau) = -b_{rs}(\tau) \quad (s, r = 1, 2, \dots, N).$$

Предположим, что для системы (23.56) выполняются все условия, приведенные на стр. 283 настоящего параграфа. Для построения приближенных асимптотических решений системы (23.56), зависящих от двух произвольных постоянных и соответствующих одночастотному режиму, мы можем либо воспользоваться общей методикой, разработанной в § 20, с соответствующими уточнениями, как это было сделано в начале § 23, либо непосредственно результатами § 23.

Для применения результатов § 20 необходимо систему  $N$  уравнений второго порядка (23.56) свести к системе  $2N$  уравнений первого порядка. Для этого, как и обычно, вводим новые переменные по формулам:

$$q_{N+s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \dots, N) \quad (23.57)$$

или в развернутом виде

$$q_{N+s} = \sum_{r=1}^N a_{sr}(\tau) \dot{q}_r + \sum_{r=1}^N g_{rs}(\tau) q_r \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (23.58)$$

Воспользовавшись обозначением (23.57), имеем:

$$H = \sum q_s q_{N+s} - \mathcal{L}. \quad (23.59)$$

После этого систему (23.3), согласно известным принципам механики, можно заменить системой  $2N$  уравнений:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_{N+s}}, \quad \frac{dq_{N+s}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \widehat{Q}_s, \quad (23.60)$$

где  $\widehat{H}$  и  $\widehat{Q}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) являются так называемыми союзными выражениями для функций  $H$  (23.55) и  $Q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) (23.2), получающимися после замены в последних скоростях  $\dot{q}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) их значениями, выраженнымими из системы (23.58) через значения  $q_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ).

Подставляя  $q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) в выражение (23.59), получим:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \sum_{s, r=1}^N \alpha_{sr}(\tau) q_s q_r + \sum_{s, r=1}^N \gamma_{sr}(\tau) q_s q_{N+r} + \frac{1}{2} \sum_{s, r=1}^N \beta_{sr}(\tau) q_{N+s} q_{N+r}, \quad (23.61)$$

причем  $\alpha_{sr}(\tau) = \alpha_{rs}(\tau)$ ,  $\beta_{sr}(\tau) = \beta_{rs}(\tau)$  и  $\gamma_{sr}(\tau)$  ( $s, r = 1, 2, \dots, N$ ) имеют достаточное число производных на интервале  $0 \leq \tau \leq L$ .

После этого система уравнений (23.60) может быть записана в явном виде следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{r=1}^N \alpha_{sr}(\tau) q_s + \sum_{r=1}^N \left[ \gamma_{sr}(\tau) q_{N+r} + \frac{dq_{N+s}}{dt} \right] = \widehat{Q}_s, \\ & \sum_{r=1}^N \left[ \gamma_{rs}(\tau) q_r - \frac{d\dot{q}_s}{dt} \right] + \sum_{r=1}^N \beta_{sr}(\tau) q_{N+s} = 0 \\ & \quad (s = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (23.62)$$

Система (23.62) имеет такой же вид, как и рассмотренная в § 20 система уравнений (20.1), и следовательно, мы можем построить асимптотические решения, воспользовавшись результатами § 20 (разумеется, с учетом того, что в данном случае коэффициенты уравнений, а также правые части зависят еще от «медленного» времени  $\tau$ ).

Однако можно и не приводить систему уравнений (23.56) к системе  $2N$  уравнений первого порядка, а построить непосредственно для нее асимптотические решения, несколько обобщив результаты, полученные в § 20 и в настоящем параграфе.

Мы должны будем в этом случае вместо вспомогательной системы (23.4) рассматривать следующую:

$$\sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \ddot{q}_{sr} + \sum_{s=1}^N b_{rs}(\tau) \dot{q}_s + \sum_{s=1}^N c_{sr}(\tau) q_s = 0 \quad (23.63)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N).$$

Решение системы (23.56), соответствующее одночастотному режиму, ищем в виде рядов

$$q_s = u_s^{(0)}(\tau, a, \psi) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \psi) + \dots \quad (23.64)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$u_s^{(0)}(\tau, a, \psi) = \varphi_s^{(1)}(\tau) ae^{i\psi} + \varphi_s^{*(1)}(\tau) ae^{-i\psi} \quad \left( \psi = \frac{p}{q} \nu(\tau) + \vartheta \right)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

$\varphi_s^{(1)}(\tau)$  — фундаментальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{r=1}^N \{ -a_{sr}(\tau) \omega_1^2(\tau) + i b_{sr}(\tau) \omega_1(\tau) + c_{sr}(\tau) \} \varphi_r^{(1)}(\tau) = 0 \quad (23.65)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

$\varphi_s^{*(1)}(\tau)$  — сопряженные с  $\varphi_s^{(1)}(\tau)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), а  $\omega_1(\tau)$  определяется из уравнения

$$D \| -a_{sr}(\tau) \omega^2 + i b_{sr}(\tau) \omega + c_{sr}(\tau) \| = 0. \quad (23.66)$$

Для составления же уравнений, определяющих величины  $a$  и  $\vartheta$  и имеющих такой же вид, как и уравнения (23.10), поступаем как и обычно, т. е. находим вначале «регуляризованное» выражение для  $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \psi)$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), а из условий конечности, которые в нашем случае будут иметь такой же вид, как и условия (23.25), находим  $A_1(\tau, a, \vartheta)$  и  $B_1(\tau, a, \vartheta)$  и т. д.

## ГЛАВА V

### МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

#### § 24. Уравнения первого и высших приближений в методе усреднения

В начале настоящей книги мы вкратце останавливались на приведении нелинейного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр, к стандартной форме и построении приближенного решения согласно принципу усреднения.

Остановимся теперь на этом вопросе более подробно.

Как известно, вид нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, а также самый характер вхождения в них малого параметра может быть чрезвычайно разнообразным.

Однако во многих случаях с помощью простых замен переменных дифференциальные уравнения колебаний могут быть приведены к одной общей форме, в которой правые части пропорциональны малому параметру. Такую форму дифференциальных уравнений мы условились называть стандартной.

Приведение дифференциальных уравнений к стандартной форме с последующим применением принципа усреднения является эффективным методом в особенности при исследовании нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы.

Так, например, в случае, если нелинейная колебательная система с  $N$  степенями свободы характеризуется следующими выражениями кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^N a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^N b_{kj} q_k q_j, \quad (24.1)$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_N$  — обобщенные координаты,  $a_{kj}, b_{kj}$  — постоянные и, кроме того, квадратичные формы  $T$  и  $V$  определенно-положительны, то, как известно, посредством линейного преобразования

$$q_j = \sum_{k=1}^N \varphi_{jk} x_k \quad (24.2)$$

можно ввести нормальные координаты  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , для которых

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{x}_k^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k^2 x_k^2, \quad (24.3)$$

и уравнения Лангранжа для невозмущенного движения принимают следующий вид:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (24.4)$$

Допустим теперь, что на нашу систему действует малое возмущение вида

$$\varepsilon Q_k = \varepsilon \{Q_k^{(0)}(q_k, \dot{q}_k) + \sum_a [Q_{k1}^{(a)}(q_k, \dot{q}_k) \cos \Omega_a t + Q_{k2}^{(a)}(q_k, \dot{q}_k) \sin \Omega_a t]\}, \quad (24.5)$$

где  $\Omega_a$  — частоты возмущающих сил,  $\varepsilon$  — малый параметр.

Тогда, переходя в (24.5) также к нормальным координатам, получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon X_k(t, x_k, \dot{x}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (24.6)$$

где  $\varepsilon X_k$  определяются из условия эквивалентности работ согласно формуле

$$X_k = \sum_{j=1}^N Q_j \varphi_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (24.7)$$

Уравнения (24.6) путем замены переменных

$$x_k = z_k e^{i\omega_k t} + z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \quad (24.8)$$

$$\dot{x}_k = i\omega_k z_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k z_{-k} e^{-i\omega_k t}, \quad (24.9)$$

в которых  $z_k$  и  $z_{-k}$  — комплексно сопряженные неизвестные функции времени, могут быть приведены к стандартной форме.

Действительно, дифференцируя (24.8) и сравнивая с (24.9), имеем:

$$\dot{z}_k e^{i\omega_k t} + \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = 0. \quad (24.10)$$

Дифференцируя (24.9) и подставляя в (24.6), получим:

$$i\omega_k \dot{z}_k e^{i\omega_k t} - i\omega_k \dot{z}_{-k} e^{-i\omega_k t} = \varepsilon X_k. \quad (24.11)$$

Полагая для упрощения записи

$$-\omega_{-k} = \omega_k, \quad X_{-k} = X_k, \quad (24.12)$$

можем (24.6) представить в виде

$$\frac{dz_g}{dt} = \varepsilon Z_g(t, z_k) \begin{cases} g = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \\ k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}. \quad (24.13)$$

К уравнениям типа (24.13) могут быть приведены также уравнения, описывающие колебания систем, находящихся под воздействием сил высокой частоты, и другие.

Итак, остановимся на изложении формального метода построения приближенных решений для уравнений в стандартной форме:

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (24.14)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, а  $X_k$  могут быть представлены с помощью сумм:

$$X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_v e^{ivt} X_{kv}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (24.15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

в которых  $v$  — постоянные частоты.

Необходимо отметить, что уравнения (24.14) рассматриваются исключительно в вещественной области, и комплексная форма представления синусоидальных колебаний, примененная в (24.15), введена лишь для простоты обозначений.

Иногда при рассмотрении высших приближений целесообразно учитывать в дифференциальных уравнениях также члены высшего порядка по отношению к  $\varepsilon$ . При этом получаем, например:

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 Y_k(t, x_1, \dots, x_n) + \dots \quad (24.16)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $Y_k$  — функции того же вида, что и  $X_k$ . Этот тип уравнений также будем называть стандартным. При применении теории возмущений здесь не вносится никаких существенных изменений.

Прежде чем приступить к изложению этой теории, введем ряд сокращенных обозначений. Так, совокупность  $n$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  условимся обозначать одной буквой  $x$ . Тогда уравнения (24.14) запишутся в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (24.17)$$

где

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(x). \quad (24.18)$$

Формулы дифференцирования сложных функций

$$\frac{dF_k(t, x_1, \dots, x_n)}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial t} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_q} \frac{dx_q}{dt} \quad (24.19)$$

в наших обозначениях будут:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) F, \quad (24.20)$$

где, таким образом,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  трактуется как матрица

$$\left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_q} \right\|,$$

приложенная к вектору  $\frac{dx}{dt}$ , и  $\left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right)$  — как операторное скалярное произведение

$$\sum_{q=1}^n \frac{dx_q}{dt} \frac{\partial}{\partial x_q}. \quad (24.21)$$

Очевидно, что применение указанной матрично-векторной системы обозначений не требует особых пояснений и представляет значительное преимущество в отношении сокращения записи.

Пусть, далее,  $F(t, x)$  является суммой вида

$$F(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} F_{\nu}(x). \quad (24.22)$$

Тогда, вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} M_t \{F(t, x)\} &= F_0(x), \\ \widetilde{F}(t, x) &= \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} F_{\nu}(x), \\ \widetilde{\widetilde{F}}(t, x) &= \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{(i\nu)^2} F_{\nu}(x) \end{aligned} \right\} \quad (24.23)$$

и т. д., получим тождественно:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = \tilde{F}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F - M \underset{t}{\langle} F \rangle. \quad (24.24)$$

Оператор  $\sim$  будем называть интегрирующим оператором,  $M$  — оператором усреднения при постоянных  $x$  или оператором усреднения по явно содержащемуся времени.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (24.17), где  $\varepsilon$  — малый параметр и где выражения  $X$  как функции времени  $t$  представляются суммами (24.18).

Заметим, что форма приближенного решения может быть найдена, или лучше сказать угадана, с помощью совершенно интуитивных соображений, а именно: так как первые производные  $\frac{dx}{dt}$  пропорциональны малому параметру, естественно считать  $x$  медленно изменяющимися величинами. Представим  $x$  как суперпозицию плавно изменяющегося члена  $\xi$  и суммы малых вибрационных членов и ввиду малости этих последних в первом приближении положим  $x = \xi$ . Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi) = \varepsilon \sum_{\nu} X_{\nu}(\xi) e^{i\nu t}, \quad (24.25)$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \text{малые синусоидальные колебательные члены}. \quad (24.26)$$

Считая, что эти синусоидальные колебательные члены вызывают лишь малые вибрации  $x$  около  $\xi$  и не оказывают влияния на систематическое изменение  $x$ , приходим к уравнениям первого приближения в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon M \underset{t}{\langle} X(t, \xi) \rangle. \quad (24.27)$$

Для получения второго приближения необходимо принять во внимание в выражении  $x$  также и вибрационные члены; учитывая в (24.26) член  $\varepsilon e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi)$ , как вызывающий в  $x$  колебание вида

$$\frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi),$$

приходим к следующему приближенному выражению:

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi). \quad (24.28)$$

Подставляя (24.28) в уравнение (24.17), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}), \quad (24.29)$$

т. е.

$\frac{dx}{dt} = \varepsilon M \underset{t}{\langle} X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) \rangle + \text{малые синусоидальные колебательные члены},$   
откуда, пренебрегая влиянием синусоидальных колебательных членов

на систематическое изменение  $\xi$ , получаем уравнения второго приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M \left\{ X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) \right\} = \varepsilon M \left\{ X(t, \xi) + \varepsilon \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} \quad (24.30)$$

и т. д.

Приведенные рассуждения, очевидно, не могут претендовать на какую-либо убедительность; против них может быть выдвинуто хотя бы то возражение, что при составлении приближенных уравнений (24.27) в уравнениях (24.17) отброшены члены того же порядка малости, что и оставленный член  $\varepsilon X_0$ .

Нетрудно, однако, придать им более обоснованную форму.

Совершим для этого в уравнениях (24.17) замену переменных

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad (24.31)$$

где  $\xi$  рассматриваются как новые неизвестные.

Дифференцируя (24.31), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t}. \quad (24.32)$$

Но ввиду свойства (24.24) интегрирующего оператора

$$\frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} = X(t, \xi) - X_0(\xi).$$

Подставляя (24.31) и (24.32) в уравнение (24.17), получаем:

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi) - \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon X \{ t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) \}$$

или

$$\left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\} \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \{ X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) - X(t, \xi) \}, \quad (24.33)$$

где 1 рассматривается как единичная матрица.

Умножая (24.33) слева на

$$\left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1}, \quad (24.34)$$

замечаем, что новые неизвестные  $\xi$  удовлетворяют уравнениям вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1} X_0(\xi) + \varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1} \{ X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) - X(t, \xi) \}. \quad (24.35)$$

С другой стороны, разлагая (24.34) в ряд по степеням  $\varepsilon$ , имеем:

$$\left\{ 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\}^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots,$$

где вообще символ  $\varepsilon^m$  обозначает величины порядка малости  $\varepsilon^m$ . Поэтому уравнения (24.35) дают:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \dots, \quad (24.36)$$

или более подробно

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \{X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) - X(t, \xi)\} + \varepsilon^3 \dots = \\ &= \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned} \quad (24.37)$$

Итак, если  $\xi$  удовлетворяет уравнениям (24.36), правая часть которых отличается от правой части уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (24.38)$$

на величины второго порядка малости, то выражение

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) \quad (24.39)$$

представляет точное решение рассматриваемых уравнений (24.17).

Поэтому можем принять в качестве первого приближения

$$x = \xi, \quad (24.40)$$

взяв за  $\xi$  решение уравнений первого приближения (24.38).

Выражение (24.39), в котором  $\xi$  удовлетворяет этим же уравнениям, будем называть улучшенным первым приближением.

Подставляя улучшенное первое приближение в точные уравнения (24.17), нетрудно убедиться, что это приближение удовлетворяет им с точностью до величин второго порядка малости.

Как видно, для эффективного построения приближенного решения необходимо предварительно решить уравнения первого приближения, и тот факт, что эти уравнения (так же, как и точные) являются дифференциальными, накладывает определенное ограничение на возможность применения изложенного метода. Однако следует подчеркнуть, что для весьма большого числа практически интересных случаев уравнения первого приближения оказываются гораздо более простыми и поддающимися исследованию. При этом во многих случаях, в которых общее решение не удается получить, можно найти, по крайней мере, важные частные решения, например, соответствующие установившимся колебательным процессам.

Так, например, при  $n = 1$  уравнения первого приближения интегрируются в квадратурах; при  $n = 2$  для их исследования может быть использована известная теория Пуанкаре.

При любом  $n$ , если  $X_0(\xi)$  обращается в нуль в некоторой точке  $\xi = \xi_0$ , можем рассматривать «квазистатическое» решение

$$x = \xi_0$$

уравнений первого приближения. Для исследования устойчивости этого решения можно поступать обычным образом, составив уравнения для малых отклонений (уравнения в вариациях):

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \dot{\xi}. \quad (24.41)$$

Если все вещественные части корней характеристического уравнения

$$\text{Det} \left| 1 \cdot p - \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \right| = 0 \quad (24.42)$$

отрицательны, то рассматриваемое квазистатическое решение оказывается устойчивым. Всякое решение уравнений первого приближения, исходящее из начальных значений, достаточно близких к  $\xi_0$ , будет при  $t \rightarrow \infty$  экспоненциально приближаться к квазистатическому решению. Если хотя бы для одного из корней характеристического уравнения вещественная часть положительна, имеем случай неустойчивости. Может представиться также критический случай, когда все вещественные части равны нулю. Этот случай иногда можно свести к двум предыдущим с помощью рассмотрения высших приближений.

Как показывает улучшенное первое приближение для рассматриваемого квазистатического решения,  $x$  представляется в виде суммы постоянного члена и малых синусоидальных колебаний с «внешними» частотами  $v$ . Высшие приближения выявили бы также наличие членов с комбинационными частотами, составленными из частот  $v$ .

Эти заключения, сделанные при рассмотрении приближенных решений, могут быть подтверждены и для точных решений уравнений (24.17) на основе строгой математической теории. Так, в работе [7] показано, что в случае, когда вещественные части корней характеристического уравнения (24.42) не равны нулю, можно установить при весьма общих условиях, что точные уравнения (24.17) имеют почти периодическое решение  $x = x(t)$  (с частотами из базиса  $v$ ), лежащее в окрестности точки  $x = \xi$ . Эта окрестность может быть взята сколь угодно малой при достаточно малом  $\varepsilon$ . Указанное почти периодическое решение устойчиво или неустойчиво в зависимости от знаков вещественных частей корней алгебраического уравнения (24.42).

Возвращаясь к уравнениям (24.38), заметим, что по самому определению оператора усреднения

$$X_0(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}$$

и, следовательно, уравнения первого приближения могут быть представлены в форме

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}. \quad (24.43)$$

Таким образом, уравнения первого приближения (24.43) получаются из точных уравнений (24.17) путем усреднения последних по явно содержащемуся времени  $t$ . При выполнении усреднения  $\xi$  трактуются как постоянные.

Этот формальный процесс, состоящий в замене точных уравнений усредненными, называется иногда принципом усреднения.

Как убедимся далее, для обоснования принципа усреднения не требуется, чтобы  $X(t, \xi)$  могла быть представлена суммой (24.18); существенным здесь является лишь существование среднего значения

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt. \quad (24.44)$$

Следует заметить, что в той или иной форме принцип усреднения уже давно применялся для получения приближенных решений. Так, еще в методе «секулярных возмущений», разработанном основоположниками небесной механики, применялся по существу тот же принцип усреднения. Однако проблемой обоснования этого принципа стали заниматься лишь сравнительно недавнее время.

Перейдем теперь к построению второго приближения.

Заметим, что при построении первого приближения путем замены переменных (24.31) уравнения (24.17) были преобразованы к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \dots$$

Для получения второго приближения найдем аналогичную замену переменных, преобразующую переменную  $x$  к  $\xi$ , удовлетворяющей уравнению вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (24.45)$$

Чтобы прийти к этой замене переменных наиболее естественным, по нашему мнению, путем, найдем выражение

$$x = \Phi(t, \xi, \varepsilon), \quad (24.46)$$

которое для  $\xi$ , удовлетворяющей уравнению типа

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi), \quad (24.47)$$

удовлетворяло бы (24.17) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$ .

Так как при  $\xi$ , определяемой из уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

выражение

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$$

удовлетворяет уравнению (24.17) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ , то решение (24.46) будем искать в форме

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi), \quad (24.48)$$

где  $F$  представляется суммами вида

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_\mu(\xi). \quad (24.49)$$

Но для (24.48)

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 \dots = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (24.50)$$

С другой стороны, при  $\xi$ , определяемой уравнением (24.47), дифференцированием выражения (24.48) находим:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots, \quad (24.51)$$

так как

$$\frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} = X(t, \xi) - X_0(\xi).$$

Таким образом, выражение (24.50) будет равно (24.51) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$ , если подобрать находящиеся в нашем распоряжении  $P(\xi)$  и  $F(t, \xi)$  так, чтобы было выполнено следующее соотношение:

$$\frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - P(\xi). \quad (24.52)$$

Но виду того, что

$$\widetilde{X}(t, \xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi); \quad X(t, \xi) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(\xi), \quad (24.53)$$

мы можем написать:

$$\begin{aligned} \left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) &= \sum_{\nu', \nu'' (\nu' \neq 0)} e^{i(\nu' + \nu'')} t \frac{1}{i\nu'} \times \\ &\times \left( X_{\nu'} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X_{\nu''}(\xi) - \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} \frac{\partial X_\nu(\xi)}{\partial \xi} X_0(\xi), \end{aligned} \quad (24.54)$$

где в сумме

$$\sum_{\substack{\nu', \nu'' \\ (\nu' \neq 0)}}$$

суммирование распространено по всем парам  $(\nu', \nu'')$  частот  $\nu$ , фигурирующих в суммах (24.53).

Выражение (24.54) можем представить, следовательно, суммой вида

$$\left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) = \sum_{(\mu=\nu, \nu'+\nu'')} e^{i\mu t} \Phi_\mu(\xi),$$

и соотношение (24.52) будет выполнено, если принять

$$P(\xi) = \Phi_0(\xi) = M_t \left\{ \left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) \right\} = M_t \left\{ \left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}$$

и

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu \neq 0} \frac{e^{i\mu t}}{i\mu} \Phi_\mu(\xi) = \overline{\left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi)} - \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi). \quad (24.55)$$

Итак, резюмируя, можем утверждать, что при  $\xi$ , определяемой уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}, \quad (24.56)$$

выражение

$$x = \xi + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \overline{\left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi)} - \varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) \quad (24.57)$$

удовлетворяет уравнению (24.17) с точностью до величин порядка  $\varepsilon^3$ .

Покажем теперь, что если рассматривать полученное выражение (24.57) как формулу замены переменных, преобразующую неизвестную  $x$ , определяемую точным уравнением (24.17), к новой неизвестной  $\xi$ , то она будет удовлетворять уравнению вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \widetilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (24.58)$$

Для этой цели продифференцируем (24.57) и воспользуемся для сокращения обозначением (24.55).

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = \\ &= \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (24.59)$$

где 1 обозначает единичную матрицу.

Но по самому определению интегрирующего оператора имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} &= \varepsilon X(t, \xi) - \varepsilon M_t \{ X(t, \xi) \} + \varepsilon^2 \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}, \end{aligned}$$

и потому из (24.59) вытекает:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t, \xi) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) - \\ &\quad - \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что в силу (24.17) это выражение должно быть равным следующему:

$$\varepsilon X(t, x) = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X} + \varepsilon^2 F) = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots$$

Таким образом, видим, что переменная  $\xi$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^{-1} \left[ \varepsilon X_0(\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots \right]. \end{aligned} \quad (24.60)$$

Но очевидно, что

$$\left( 1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t, \xi)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \dots,$$

и поэтому уравнение (24.60) может быть представлено в форме

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots,$$

совпадающей с (24.58).

Итак, если  $\xi$  удовлетворяет уравнению (24.58), правая часть которого отличается от правой части уравнения (24.56) на величины порядка малости  $\varepsilon^3$ , то выражение (24.57) представляет точное решение уравнения (24.17).

Итак, в качестве второго приближения примем:

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad (24.61)$$

где  $\xi$  определяется уравнением (24.56). Иначе говоря, за второе приближение принимаем форму улучшенного первого приближения, в которой  $\xi$  удовлетворяет уравнению уже не первого, а второго приближения.

Выражение (24.57), в котором  $\xi$  определено из уравнений (24.56), назовем улучшенным вторым приближением.

Как мы видели, улучшенное второе приближение удовлетворяет точному уравнению (24.17) с погрешностью порядка малости  $\varepsilon^3$ .

Все сказанное непосредственно обобщается и на уравнения типа

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x), \quad (24.62)$$

в которые входят члены второго порядка малости.

В этом случае уравнения второго приближения примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M \left\{ X(t, \xi) \right\} + \varepsilon^2 M \left\{ Y(t, \xi) \right\} + \varepsilon^2 M \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}, \quad (24.63)$$

а выражение второго приближения будет:

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad (24.64)$$

и наконец, для улучшенного второго приближения находим:

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 \tilde{Y}(t, \xi) + \varepsilon^2 \overbrace{\left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi)} - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi). \quad (24.65)$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} M \left\{ \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) \right\} &= M \left\{ \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots = \\ &= M \left\{ \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + \varepsilon^2 Y(t, \xi) \right\} + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned} \quad (24.66)$$

и поэтому, так как в уравнениях второго приближения члены порядка малости  $\varepsilon^3$  не учитываются, (24.63) можно записывать безразлично в форме

$$\frac{d\xi}{dt} = M \left\{ \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi) \right\} \quad (24.67)$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} = M \left\{ \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) + \varepsilon^2 Y(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) \right\}. \quad (24.68)$$

Таким образом, видим, что уравнения второго приближения могут быть получены непосредственно из точных уравнений (24.62), если в их правые части подставить вместо  $x$  форму улучшенного первого приближения (или, что то же самое, форму второго приближения) и усреднить по явно содержащемуся времени  $t$ , считая в процессе усреднения переменные  $\xi$  как бы постоянными, причем величины третьего порядка малости могут отбрасываться.

Этот принцип усреднения может быть также сформулирован следующим образом: уравнения второго приближения получаются усреднением точных уравнений (24.62), в обе части которых подставлено улучшенное первое приближение, по явно содержащемуся времени. В самом деле, уравнения второго приближения вытекают из соотношения

$$M \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = M \left\{ \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 Y(t, x) \right\} \quad (24.69)$$

(где в обеих частях вместо  $x$  стоит  $\xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$ ), причем в процессе усреднения  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\xi$  трактуются как постоянные и величины порядка

малости  $\varepsilon^3$  могут не приниматься во внимание. Для этого стоит лишь заметить, что при указанном истолковании операции  $M$  имеем, очевидно:

$$M \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = M \left\{ \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right\} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon M \left\{ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \right\} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon M \left\{ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} \right\} = \frac{d\xi}{dt},$$

и (24.69) переходит в (24.68).

В заключение сделаем некоторые замечания относительно образования высших приближений.

Пусть общее уравнение в стандартной форме будет:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon^2 X_1(t, x) + \dots + \varepsilon^m X_{m-1}(t, x), \quad (24.70)$$

где  $X_k(t, x)$  — некоторые тригонометрические суммы того же типа, что и  $X(t, x)$ .

Тогда, чтобы образовать  $m$ -е приближение, рассмотрим выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \dots + \varepsilon^m F_m(t, \xi), \quad (24.71)$$

в котором  $F_k(t, \xi)$  являются суммами вида

$$\sum_{\mu \neq 0} e^{i\mu t} F_{k\mu}(\xi)$$

и переменная  $\xi$  будет решением уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi). \quad (24.72)$$

Подставляя (24.71) в (24.70) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  до  $m$ -го порядка включительно, подберем  $F_1, \dots, F_m$  и  $P_1, \dots, P_m$  так, чтобы (24.71) удовлетворяло уравнению (24.70) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ .

При этом получим:

$$P_1(\xi) = M \left\{ X(t, \xi) \right\};$$

$$P_2(\xi) = M \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) + X_1(t, \xi) \right\}; \dots; F_1(t, \xi) = \tilde{X}(t, \xi);$$

$$F_2(t, \xi) = \overline{\left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi)} - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} M \left\{ X(t, \xi) + \tilde{X}_1(t, \xi) \right\}; \dots$$

Если теперь, определив  $F_1, \dots, F_m$  и  $P_1, \dots, P_m$ , мы будем рассматривать выражение (24.71) как некоторую формулу замены переменных, преобразующую неизвестную  $x$  к новой неизвестной  $\xi$ , то она определится уравнением вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} \dots \quad (24.73)$$

Таким образом, если переменная  $\xi$  удовлетворяет уравнению (24.73), отличающемуся от уравнения (24.72) на величины порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ , то формула (24.71) представляет точное решение для (24.70).

Поэтому в качестве  $m$ -го приближения может быть принято выражение

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \dots + \varepsilon^{m-1} F_{m-1}(t, \xi),$$

в котором  $\xi$  определяется уравнением  $m$ -го приближения (24.72). Для такого  $\xi$  формула (24.71) дает улучшенное  $m$ -е приближение, удовлетворяющее точному уравнению (24.70) с погрешностью порядка  $\varepsilon^{m+1}$ .

Заметим, что если нам известна форма улучшенного  $(m - 1)$ -го приближения, то уравнения  $m$ -го приближения могут быть непосредственно получены из точных уравнений (24.70) при подстановке в них этой формы и при усреднении с помощью оператора  $M$ . В основном в приложении к вышезложенной теории возмущений используется главным образом первое и иногда также второе приближение. Высшие приближения применяются редко ввиду быстрого возрастания сложности их практического построения.

В качестве примера, иллюстрирующего изложенную теорию, рассмотрим колебания физического маятника, представляющего собой твердое тело, которое может свободно вращаться в определенной вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса. Пусть точка подвеса совершает в вертикальном направлении синусоидальные колебания с малой амплитудой  $a$  и высокой частотой  $\omega$  таким образом, что\*)

$$\omega > \omega_0 \frac{l}{a}; \quad \frac{a}{l} \ll 1. \quad (24.74)$$

Как оказывается, неустойчивое верхнее положение равновесия маятника может сделаться устойчивым.

Чтобы рассмотреть это интересное явление, составим уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса. Считая затухание пропорциональным скорости, имеем\*\*):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\omega^2 \sin \omega t}{l} \sin \theta = 0, \quad (24.75)$$

где  $\theta$  — угол отклонения, отсчитываемый от нижнего положения равновесия;  $y = a \sin \omega t$  — вертикальное перемещение точки подвеса;  $\lambda$  — коэффициент затухания. В отношении величины затухания допустим, что при фиксированной точке подвеса движение маятника при малых отклонениях от нижнего положения равновесия имеет колебательный характер. Тогда, как известно,

$$\frac{\lambda^2}{4} < \omega^2. \quad (24.76)$$

Чтобы выявить в рассматриваемом уравнении (24.75) малый параметр, целесообразно ввести «безразмерное» время. Именно, вместо времени  $t$ , измеряемого в секундах, введем время  $\tau$ , для которого единицей измерения будет отнесенный к  $2\pi$  период колебаний точки подвеса,

---

\*) Здесь  $l$  — приведенная длина маятника,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  — собственная частота малых колебаний.

\*\*) В самом деле, уравнение колебаний маятника с покоящейся точкой подвеса, как известно, будет:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (\alpha)$$

но с точки зрения принципа относительности движение маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса эквивалентно движению маятника с покоящейся точкой подвеса, находящемуся в поле «силы тяжести» с ускорением  $g + y''$ . Заменив в ( $\alpha$ )  $g$  на  $g + y''$ , в результате приходим к уравнению (24.75).

т. е.  $\frac{1}{\omega}$ . Имеем, очевидно,

$$\tau = \omega t; \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}; \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2},$$

и потому из (24.75) следует:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{\lambda}{\omega} \frac{d\theta}{d\tau} + \left\{ \frac{g}{l\omega^2} - \frac{a}{l} \sin \tau \right\} \sin \theta = 0. \quad (24.77)$$

Положим для сокращения

$$k = \frac{\omega_0}{\omega} : \frac{a}{l}; \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\omega_0} k. \quad (24.78)$$

Тогда

$$\frac{g}{l\omega^2} = \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = k^2 \left( \frac{a}{l} \right)^2; \quad \frac{\lambda}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0} \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\lambda}{\omega_0} k \frac{a}{l} = 2\alpha \frac{a}{l},$$

и уравнение (24.77) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{a}{l} \frac{d\theta}{d\tau} + \left\{ k^2 \left( \frac{a}{l} \right)^2 - \frac{a}{l} \sin \tau \right\} \sin \theta = 0.$$

Принимая в качестве малого параметра  $\varepsilon$  отношение амплитуды колебаний точки подвеса к приведенной длине маятника, имеем окончательно:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\theta}{d\tau} + \{ k^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin \tau \} \sin \theta = 0, \quad (24.79)$$

где согласно (24.74), (24.75) и (24.78) постоянные  $\alpha$  и  $k$  будут меньше единицы:

$$\alpha < 1, \quad k < 1.$$

Так как полученное уравнение, содержащее малый параметр  $\varepsilon$ , не является уравнением в стандартной форме, то для непосредственного приложения ранее разработанной теории следует предварительно преобразовать его к этой форме.

Как оказывается, посредством простой замены переменных рассматриваемое дифференциальное уравнение второго порядка может быть преобразовано к двум уравнениям первого порядка в стандартной форме. Для этого введем вместо одной неизвестной функции времени  $\theta$  две новые неизвестные  $\varphi$  и  $\Omega$  с помощью формул

$$\theta = \varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi, \quad (24.80)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi. \quad (24.81)$$

Дифференцируя (24.80) и сравнивая с (24.81), имеем:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi,$$

откуда

$$(1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon \Omega. \quad (24.82)$$

Дифференцируя (24.81) и подставляя в уравнение (24.79), получаем:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \varepsilon \frac{d\Omega}{d\tau} - \varepsilon \cos \tau \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon \sin \tau \sin \varphi = (\varepsilon \sin \tau - k^2 \varepsilon^2) \sin \theta - 2\alpha \varepsilon \frac{d\theta}{d\tau},$$

и поэтому

$$\varepsilon \frac{d\Omega}{dt} = \varepsilon \cos \tau \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon \sin \tau \{ \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - \sin \varphi \} - k^2 \varepsilon^2 \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - 2\alpha\varepsilon (\varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \varphi),$$

откуда, сокращая на  $\varepsilon$  и принимая во внимание (24.82), получаем:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \{\sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - \sin \varphi\} \sin \tau -$$

$$\cdot - k^2 \varepsilon \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) + \frac{\varepsilon \Omega \cos \tau \cos \varphi}{1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi} - 2\alpha\varepsilon (\Omega - \cos \tau \sin \varphi). \quad (24.83)$$

Таким образом, видим, что благодаря (24.82) и (24.83) переменные  $\varphi$ ,  $\Omega$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям в стандартной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \varepsilon \Omega + \varepsilon^2 \dots, \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= \varepsilon \{ -\sin^2 \tau \sin \varphi \cos \varphi - k^2 \sin \varphi + \\ &\quad + \Omega \cos \tau \cos \varphi - 2\alpha \Omega + 2\alpha \cos \tau \sin \varphi \} + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (24.84)$$

Применяя к ним принцип усреднения и учитывая тождественные соотношения

$$M_{\tau} \{ \cos \tau \} = 0, \quad M_{\tau} \{ \sin^2 \tau \} = \frac{1}{2},$$

получаем уравнения первого приближения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \varepsilon \Omega, \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= -\varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + k^2 \sin \varphi + 2\alpha \Omega \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24.85)$$

Эти два уравнения первого порядка (24.85), очевидно, эквивалентны одному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2 \left( k^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \sin \varphi = 0. \quad (24.86)$$

Полученное уравнение первого приближения гораздо проще точного уравнения (24.79) хотя бы тем, что не содержит явно времени. Оно представляет собой уравнение колебаний системы, подобной маятнику с неподвижной точкой подвеса, у которой «восстанавливющая сила» пропорциональна не  $\sin \varphi$ , а  $\left( k^2 + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \sin \varphi$ . Любопытно отметить, между прочим, что такого рода системами являются, например, некоторые гироскопы\*).

При отсутствии затухания ( $\alpha = 0$ ) уравнение (24.86) полностью решается в эллиптических функциях. Однако для рассмотрения интересующего нас вопроса не требуется иметь выражения общего решения. Непосредственно из (24.86) видим, что это уравнение допускает квазистатическое решение  $\varphi = \pi$ , соответствующее верхнему положению равновесия маятника.

\*). Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, М., ГОНТИ, 1939, стр. 93, формула (10).

Для исследования устойчивости рассмотрим малые отклонения  $\delta\varphi = \varphi - \pi$  от этого положения. Тогда уравнение в вариациях для  $\delta\varphi$  примет вид

$$\frac{d^2\delta\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\delta\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} - k^2 \right) \delta\varphi = 0. \quad (24.87)$$

Так как здесь  $\varepsilon\alpha > 0$ , то условие устойчивости будет:

$$\frac{1}{2} - k^2 > 0,$$

т. е., принимая во внимание определение  $k$ :

$$\omega > \sqrt{2}\omega_0 \frac{l}{a}. \quad (24.88)$$

Итак, если частота вибраций точки подвеса достаточно велика, чтобы удовлетворить неравенство (24.88), то верхнее положение маятника становится устойчивым.

Пусть, например,  $l = 40$  см,  $a = 2$  см. В этом случае условие (24.88) дает:

$$\omega > \sqrt{2} \sqrt{\frac{981}{40}} 20 \approx 140 \frac{1}{сек}.$$

Верхнее положение маятника будет, следовательно, устойчивым, если число циклов колебаний точки подвеса больше, чем  $\frac{\omega}{2\pi}$ , т. е. больше 22,3 колебания в секунду.

Если рассмотрим аналогично квазистатическое решение  $\varphi = 0$ , соответствующее нижнему положению равновесия, то убедимся, что оно остается устойчивым при любых  $k$  и частота колебаний при малых отклонениях без учета затухания будет равна  $\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} + k^2}$  для времени  $t$  и соответственно

$$\varepsilon\omega \sqrt{\frac{1}{2} + k^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{a\omega}{l} \right)^2 + \omega_0^2}$$

для времени  $t$ .

Таким образом, для рассмотренного выше конкретного примера при числе колебаний точки подвеса, равном 60 в секунду ( $\omega = 377 \frac{1}{сек}$ ), частота малых колебаний маятника будет  $\omega_p = 14,2 \frac{1}{сек}$ , тогда как в случае покоящейся точки подвеса эта частота равна  $\omega_v = 4,94 \frac{1}{сек}$ . Эффективная восстанавливающая сила увеличивается здесь в  $\left( \frac{\omega_p}{\omega_v} \right)^2 = 8,2$  раза. Эта сила при малых отклонениях будет, следовательно, такой же, как у соответствующего обычного маятника, в 8,2 раза более тяжелого.

Заметим, наконец, что уравнение первого приближения (24.86) дает нам возможность рассматривать вопрос об устойчивости не только при малых отклонениях, но также и при больших.

Перейдем к исследованию колебаний маятника во втором приближении. Нетрудно убедиться, что уравнения второго приближения совпадают с уравнениями первого приближения.

Поэтому при построении второго приближения будем исследовать другой возможный тип движения маятника. Оказывается, что маятник может синхронно вращаться с угловой скоростью  $\omega$ , затрачивая работу на преодоление сопротивлений, если только последние не превзойдут известной величины. Здесь возможны колебания оси маятника около оси, вращающейся равномерно с угловой скоростью, точно равной  $\omega$ .

Чтобы несколько упростить выкладки, исключим действие силы тяжести, допустив для этого, что движение маятника совершается в горизонтальной плоскости.

Тогда, положив в уравнении (24.79)  $k = 0$ , получим:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\theta}{d\tau} - \varepsilon \sin \tau \sin \theta = 0. \quad (24.89)$$

Угол  $\theta$  измеряет отклонение оси маятника от некоторой неподвижной оси, и так как предполагается исследовать колебания маятника около оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то целесообразно ввести вместо угла  $\theta$  угол  $\phi$ :

$$\phi = \theta - \omega t,$$

или для безразмерного времени  $\tau$ , использованного в уравнении (24.89),

$$\phi = \theta - \tau.$$

Очевидно, что для угла  $\phi$  уравнение колебаний будет:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\psi}{d\tau} - \varepsilon \sin \tau \sin (\psi + \tau) + 2\varepsilon\alpha = 0. \quad (24.90)$$

Для приведения этого уравнения (24.90) к стандартной форме положим

$$\psi = \psi, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} \nu. \quad (24.91)$$

В результате получаем два уравнения первого порядка относительно неизвестных  $\psi$  и  $\nu$ :

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} \nu,$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} \sin \tau \sin (\psi + \tau) - 2\sqrt{\varepsilon}\alpha - 2(\sqrt{\varepsilon})^2 \alpha \nu, \quad (24.92)$$

в которых за малый параметр может быть принят  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Так как

$$\sin \tau \sin (\psi + \tau) = \frac{1}{2} \cos \psi - \frac{1}{2} \cos (\psi + 2\tau),$$

улучшенное первое приближение (второе приближение) будет:

$$\psi = \psi, \quad \nu = \Omega - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos (\psi + 2\tau) = \Omega - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4} \sin (\psi + 2\tau). \quad (24.93)$$

Подставляя (24.93) в правые части уравнений (24.92) и выполняя усреднение по  $\tau$  с постоянными  $\psi$ ,  $\Omega$ , приходим к уравнениям второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon} \Omega, \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos \psi - 2\sqrt{\varepsilon}\alpha - 2\varepsilon\alpha\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (24.94)$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\psi}{dt} - \frac{\varepsilon \cos \psi}{2} + 2\varepsilon\alpha = 0.$$

Если возвратиться к времени  $t$ , измеряемому в секундах ( $t = \frac{\tau}{\omega}$ ), то полученное уравнение второго приближения может быть представлено в виде

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \lambda \frac{d\psi}{dt} - \frac{a\omega^2}{2l} \cos \psi + \lambda\omega = 0. \quad (24.95)$$

Заметим, между прочим, что в принятых обозначениях уравнение первого приближения было бы

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{a\omega^2}{2l} \cos \psi + \lambda\omega = 0. \quad (24.96)$$

Оно отличается от уравнений второго приближения отсутствием в нем члена  $\lambda \frac{d\psi}{dt}$ , вызывающего затухание колебаний.

Рассматривая уравнение второго приближения, видим, что оно допускает квазистатические решения

$$\psi = \psi_0, \text{ где } \frac{a\omega^2}{2l} \cos \psi_0 = \lambda\omega, \quad (24.97)$$

соответствующие вращению маятника ( $\theta = \omega t + \psi_0$ ) с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , если только

$$\lambda\omega < \frac{a\omega^2}{2l}. \quad (24.98)$$

При

$$\lambda\omega > \frac{a\omega^2}{2l} \quad (24.99)$$

такие квазистатические решения невозможны.

Для исследования устойчивости квазистатических решений (24.97) в случае (24.98) рассмотрим малые отклонения  $\psi$  от  $\psi_0$ :

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi.$$

Для малых отклонений уравнение (24.95) дает:

$$\frac{d^2\delta\psi}{dt^2} + \lambda \frac{d\delta\psi}{dt} + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 \delta\psi = 0. \quad (24.100)$$

Исследуя соответствующее характеристическое уравнение

$$p^2 + \lambda p + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 = 0, \quad (24.101)$$

убеждаемся, что ввиду положительности коэффициента  $\lambda$  при  $\frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 > 0$  вещественные части корней этого уравнения отрицательны; при  $\frac{a\omega^2}{2l} \sin \psi_0 < 0$  это уравнение имеет корень с положительной вещественной частью.

Итак, решение (24.97) является устойчивым при  $\sin \psi_0 > 0$  и неустойчивым при  $\sin \psi_0 < 0$ . Имеем, следовательно, одно устойчивое квазистатическое решение  $0 < \psi_0 < \pi$  и одно неустойчивое  $\pi < \psi_0 < 2\pi$ .

Заметим, что если бы мы ограничились рассмотрением уравнения первого приближения (24.96), то в (24.100) не было бы члена  $\lambda \frac{d\psi}{dt}$  и характеристическое уравнение имело бы вид

$$p^2 + \frac{a\omega^2}{2l} \sin \phi_0 = 0.$$

Следовательно, при  $\sin \phi_0 > 0$  его корни оказываются чисто мнимыми, с вещественной частью, равной нулю, и вопрос об устойчивости неясен. О возможности таких случаев было упомянуто выше. Как видим, при рассмотрении второго приближения вещественные части корней характеристического уравнения отличны от нуля, и поэтому возможно выяснить вопрос устойчивости.

Скажем в заключение несколько слов по поводу условия существования квазистатических решений (24.97).

Заметим, что если  $I$  обозначает момент инерции маятника, то  $I\lambda\omega$  представит, очевидно, момент сил сопротивления для маятника, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ .

Умножая на  $\omega$  момент сил сопротивления, получим мощность  $N$ , расходуемую на преодоление этих сил:

$$N = I\lambda\omega^2.$$

Условие (24.98) показывает, что для возможности установившегося вращения маятника с угловой скоростью  $\omega$  необходимо, чтобы мощность, расходуемая на преодоление сил сопротивления, не достигала бы некоторого предельного значения, а именно:

$$N < \frac{I}{2} \frac{a}{l} \omega^3. \quad (24.102)$$

Так, например, если момент инерции маятника  $I = 0,5 \text{ кг см сек}^2$ , приведенная длина  $l = 40 \text{ см}$  и точка подвеса совершает в секунду 60 колебаний ( $\omega = 377 \frac{1}{сек}$ ) с амплитудой  $a = 2 \text{ см}$ , то

$$\frac{I}{2} \frac{a}{l} \omega^3 = \frac{(377)^3}{80} \text{ кг см сек}^{-1} = 6698 \text{ кг м сек}^{-1}.$$

В данном случае, следовательно, согласно условию (24.102) для возможности вращения маятника с угловой скоростью  $\omega$  (60 оборотов в секунду) необходимо, чтобы мощность, расходуемая на преодоление сопротивлений, не превосходила бы  $6698 \text{ кг м сек}^{-1}$ .

## § 25. Случай быстро вращающейся фазы

В настоящем параграфе перейдем к обобщению метода усреднения на случай системы с быстро вращающейся фазой.

Соответствующее исследование было выполнено Д. Н. Зубаревым совместно с одним из авторов настоящей монографии [10].

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется угловой переменной  $\alpha$ ,  $r$  переменными  $x_1, x_2, \dots, x_r$  и описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= X_k(\alpha, x_1, \dots, x_r) \quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda\omega(x_1, \dots, x_r) + A(\alpha, x_1, \dots, x_r), \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

где  $\lambda$  — большой параметр,  $\lambda\omega$  соответствует частоте вращения  $\alpha$ ;  $X_k(\alpha, x_1, \dots, x_r)$ ,  $A(\alpha, x_1, \dots, x_r)$  — периодические функции угловой переменной  $\alpha$  с периодом  $2\pi$ .

Заметим, что в частном случае, когда  $\omega = \text{const}$ , а  $A(\alpha, x_1, \dots, x_r) = 0$ , система (25.1) может быть непосредственно приведена к стандартной форме.

В самом деле, в данном случае имеем:

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(\lambda\omega t + \varphi, x_1, \dots, x_r) \quad (\varphi = \text{const}),$$

откуда, вводя новую независимую переменную

$$\lambda\omega t = \tau,$$

получим уравнения типа (24.14), где

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda\omega}.$$

В общем случае системы (25.1) мы также можем воспользоваться основной идеей метода усреднения.

Покажем, что переменную  $\alpha$  можно исключить из правых частей уравнений (25.1) с любой степенью точности в разложении по степеням  $\frac{1}{\lambda}$ . Для этого найдем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \xi_k^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} U_n(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r), \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

с помощью которой систему (25.1) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}_k}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} X_k^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r), \\ \frac{d\bar{\alpha}}{dt} &= \lambda\omega(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \Omega_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

так, чтобы коэффициенты в уравнении (25.3) уже не зависели от угловой переменной  $\alpha$ .

Физический смысл преобразования (25.2) заключается в разложении действительного движения, описываемого переменными  $x_1, x_2, \dots, x_r, \alpha$ , на усредненное движение с координатами  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$  и «дрожание», описываемое углом  $\bar{\alpha}$  и функциями

$$U_n(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \text{ и } \xi_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r).$$

Определение функций, входящих в уравнение (25.2), вообще говоря, неоднозначно ввиду произвола, с которым можно относить различные члены разложения или к основному, или к высшим членам ряда. Указанное обстоятельство уже неоднократно отмечалось.

В случае, если имеем какое-нибудь конкретное разложение (25.2), всегда можно совершить замену переменных вида

$$\bar{x}_k = \bar{\bar{x}}_k + \varepsilon f_k(\bar{\bar{x}}_1, \dots, \bar{\bar{x}}_r) + \varepsilon^2 \dots,$$

в результате чего получим другую возможную форму разложений, поскольку  $\bar{x}_k$  с тем же правом может быть принято за новую  $\bar{\bar{x}}_k$ .

Для получения определенных однозначных выражений коэффициентов (25.2) необходимо задать какие-либо дополнительные условия. Допустим, что  $U_n$  и  $\xi_k^{(n)}$  не должны содержать нулевых гармоник по  $\bar{\alpha}$ , считая тем самым, что в  $x_k$  и  $\bar{\alpha}$  включено все усредненное движение.

Можно было бы наложить и другие дополнительные условия. Так, например, если бы система была канонической, можно было бы потребовать, чтобы уравнения усредненного движения (25.3) также были каноническими. Поскольку указанная неоднозначность имеет тривидальный характер, мы не будем детально останавливаться на возможных случаях.

Подставляя (25.2) в (25.1) и приравнивая члены при  $\lambda$ ,  $\lambda^0$ ,  $\lambda^{-1}$ , получим систему четырех уравнений для определения шести функций:  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$ ,  $X_k^{(0)}$ ,  $X_k^{(1)}$ ,  $\xi_k^{(1)}$ ,  $U_1$

$$\left. \begin{aligned} X_k^{(0)} + \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}} \omega &= X_k \quad (k = 1, 2, \dots, r), \\ X_k^{(1)} + \frac{\partial \xi_k^{(2)}}{\partial \bar{\alpha}} \omega + \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial \bar{\alpha}} \Omega_0 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial \xi_k^{(1)}}{\partial \bar{x}_q} X_q^{(0)} &= \frac{\partial X_k}{\partial \bar{\alpha}} U_1 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_q} \xi_q^{(1)}, \\ \Omega_1 + \frac{\partial U_2}{\partial \bar{\alpha}} \omega + \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\alpha}} \Omega_0 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial U_1}{\partial \bar{x}_q} X_q^{(0)} &= \\ &= \sum_{p=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_p} \xi_p^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \xi_p^{(1)} \xi_q^{(1)} + \frac{\partial A}{\partial \bar{\alpha}} U_1 + \sum_{q=1}^r \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q} \xi_q^{(1)}, \\ \Omega_0 + \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\alpha}} \omega &= \sum_{q=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \xi_q^{(1)} + A. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

В системе (25.4) число неизвестных больше числа уравнений, что вполне согласуется со сделанным выше замечанием о неоднозначности. Недостающие уравнения получаются из условия отсутствия нулевых гармоник у  $\xi_k^{(n)}$  и  $U_n$ , т. е.

$$\tilde{\xi}_k^{(n)} = 0, \quad \tilde{U}_n = 0 \quad (25.5)$$

(волнистой чертой обозначено усреднение по  $\bar{\alpha}$ ).

Разложим функции  $A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ ,  $X_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  в ряды Фурье:

$$\left. \begin{aligned} A(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) &= \sum_{-\infty < m < \infty} A_m e^{im\bar{\alpha}}, \\ X_k(\bar{\alpha}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) &= \sum_{-\infty < m < \infty} X_{km} e^{im\bar{\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

Усреднения уравнения (25.4) по  $\bar{\alpha}$ , найдем:

$$X_k^{(0)} = X_{k,0}, \quad (25.7)$$

$$\xi_k^{(0)} = \frac{1}{\omega} \sum_{n \neq 0} X_{k,m} \frac{e^{in\bar{\alpha}}}{in}, \quad (25.8)$$

$$\Omega_0 = A_0, \quad (25.9)$$

$$U_1 = \sum_{n \neq 0} \frac{A_n e^{in\bar{\alpha}}}{in\omega} - \sum_{n \neq 0} \sum_{q=1}^r \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{X_{q,n}}{n^2 \omega^2} e^{in\bar{\alpha}}, \quad (25.10)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \widetilde{\xi_p^{(1)} \xi_q^{(1)}} + \widetilde{\frac{\partial A}{\partial \bar{\alpha}}} U_1 + \sum_{q=1}^r \widetilde{\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_q}} \widetilde{\xi_q^{(1)}}, \quad (25.11)$$

$$X_k^{(1)} = \widetilde{\frac{\partial X_k}{\partial \bar{\alpha}}} U_1 + \sum_{q=1}^r \widetilde{\frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_q}} \widetilde{\xi_q^{(1)}}. \quad (25.12)$$

С помощью (25.8), (25.10) уравнения (25.11), (25.12) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{p,q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{x}_p \partial \bar{x}_q} \frac{1}{\omega^2 n^3} X_{p,n} X_{q,-n} + \sum_{\substack{q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{1}{i \omega^2 n} A_n X_{q,-n} - \\ & - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\omega} A_n A_{-n} - \sum_{\substack{q,n \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{i \omega n} \frac{\partial A_n}{\partial \bar{x}_q} X_{q,-n}, \end{aligned} \quad (25.13)$$

$$\begin{aligned} X_k^{(1)} = & - \sum_{(n \neq 0)} \frac{1}{\omega} X_{k,n} A_{-n} - \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{in\omega} \frac{\partial X_{k,n}}{\partial \bar{x}_q} X_{q,-n} + \\ & + \sum_{\substack{n,q \\ (n \neq 0)}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_q} \frac{1}{i \omega^2 n} X_{k,n} X_{q,-n}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Выражения (25.7) – (25.10), (25.13), (25.14) дают искомое решение системы (25.4).

Перейдем от комплексных рядов Фурье (25.6) к действительным рядам:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n \cos n\bar{\alpha} + g_n \sin n\bar{\alpha}\}, \\ X_k &= X_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \{F_{k,n} \cos n\bar{\alpha} + G_{k,n} \sin n\bar{\alpha}\}. \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

Представим формулы для замены переменных (25.2) с помощью уравнений (25.8), (25.10), (25.15) в виде

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \bar{x}_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} \{ -G_{k,n} \cos n\bar{\alpha} + F_{k,n} \sin n\bar{\alpha} \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} \{ -g_n \cos n\bar{\alpha} + f_n \sin n\bar{\alpha} \} - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n, q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{n^2\omega^2} \frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}_q} \{ F_{q,n} \cos n\bar{\alpha} + G_{q,n} \sin n\bar{\alpha} \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (25.16)$$

Система уравнений (25.3) после подстановки найденных коэффициентов из (25.7) — (25.10), (25.13), (25.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_k}{dt} &= X_{k,0} - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\omega} \{ F_{k,n} f_n + G_{k,n} g_n \} - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n, q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2n\omega} \left\{ \frac{\partial F_{k,n}}{\partial\bar{x}_q} G_{q,n} - \frac{\partial G_{k,n}}{\partial\bar{x}_q} F_{q,n} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{q, n \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2\omega^2 n} \frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}_q} \{ F_{k,n} G_{q,n} - G_{q,n} F_{q,n} \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (25.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} &= \lambda\omega + A_0 + \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n, p, q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{4\omega^2 n^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{x}_p \partial\bar{x}_q} \{ F_{p,n} F_{q,n} + G_{p,n} G_{q,n} \} - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n, q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2\omega^2 n} \frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}_q} \{ g_n F_{q,n} - f_n G_{q,n} \} + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{n, q \\ (n \neq 0)}} \frac{1}{2\omega n} \left\{ \frac{\partial g_n}{\partial\bar{x}_q} F_{q,n} - \frac{\partial f_n}{\partial\bar{x}_q} G_{q,n} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \sum_n \frac{1}{2\omega} \{ f_n^2 + g_n^2 \} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (25.18)$$

Система уравнений (25.17), (25.18) дает решение поставленной в начале параграфа задачи с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно параметра  $\frac{1}{\lambda}$ . Первая группа уравнений этой системы (25.17) выражает систематическое движение. Уравнение (25.18) для  $\alpha$  выражает «дрожание». Таким образом, систематическое движение отделено от «дрожания» с точностью до членов порядка  $\frac{1}{\lambda^2}$ .

Рассмотрим в качестве примера движение заряженной частицы в магнитном поле. Эта задача представляет интерес для ряда вопросов теоретической физики.

Например, в космической электродинамике возникает задача об исследовании траекторий космических частиц в неоднородных полях. Эта же задача возникает в теории некоторых электротехнических приборов, применяемых в радиотехнике, аналогичных магнетрону.

Точное интегрирование уравнений движения заряженной частицы в неоднородном электрическом и магнитном поле затруднительно и в большинстве случаев может быть выполнено лишь численными методами. Однако и это не всегда оказывается практически возможным. В частности, трудности численного счета становятся почти непреодолимыми в том случае, если частица делает за время своего движения большое количество оборотов по ларморовской окружности. Но именно в этом случае можно воспользоваться только что изложенным методом асимптотического приближения, который позволяет обойти трудности при вычислении.

Допустим, что магнитное поле мало меняется на длине ларморовского радиуса:

$$R_L \frac{1}{H} \frac{dH}{dx} \ll 1, \quad (25.19)$$

где  $R_L = \frac{\omega}{\omega_H}$  — радиус ларморовской окружности;  $\omega_H = \frac{eH}{mc}$  — ларморовская частота,  $\omega$  — скорость частицы в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю.

Тогда заряженная частица движется в основном по спирали вдоль магнитной силовой линии, вращаясь вокруг нее на расстоянии ларморовского радиуса, и «дрейфует» в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Воспользовавшись этим обстоятельством, можно построить упрощенные усредненные уравнения для движения центра тяжести ларморовской окружности.

Выполнению условия (25.19) способствуют большая величина и однородность магнитного поля и малая величина скорости частицы. Однако условие (25.19) может быть выполнено и при большой скорости частицы, если поле достаточно велико и однородно, а также при малом магнитном поле, если скорость частицы достаточно мала и поле достаточно однородно.

В данном примере займемся исследованием движения заряженной частицы в неоднородном электрическом и магнитном поле в предположении, что магнитное поле мало меняется на длине ларморовского радиуса.

Уравнения движения заряженной частицы в магнитном и электрическом поле в нерелятивистском приближении имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad \mathbf{F} = \frac{e\mathbf{E}}{m}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (25.20)$$

Выберем криволинейную систему координат с ортами  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  в направлении линий магнитного поля и двух к нему перпендикулярных:

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\mathbf{H}}{H}, \\ \tau_1 &= [\tau_2 \tau_0], \\ \tau_2 &= [\tau_0 \tau_1], \\ \tau_0 &= [\tau_1 \tau_2]. \end{aligned} \right\} \quad (25.21)$$

Уравнения (25.20) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} + \omega_H [\mathbf{v} \boldsymbol{\tau}_0], \\ \frac{dr}{dt} &= \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (25.22)$$

где  $\omega_H = \frac{eH(r)}{mc}$  — ларморовская частота.

Представим уравнения (25.22) в такой форме, чтобы явно выделить вращение частицы с угловой частотой  $\omega_H$ . Для этого разложим вектор скорости частицы  $\mathbf{v}$  по ортам  $\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= u \boldsymbol{\tau}_0 + \omega \{ \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \alpha \} \\ (v^2 &= \omega^2 + u^2), \end{aligned} \right\} \quad (25.23)$$

где  $u$  — параллельная и  $\omega$  — перпендикулярная к полю составляющие скорости.

С помощью (25.23) уравнение (25.22) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} \boldsymbol{\tau}_0 + u \frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \{ \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \alpha \} + \\ + \omega \left\{ \frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt} \cos \alpha + \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dt} \sin \alpha \right\} + \omega \{ -\boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \alpha \} \frac{d\alpha}{dt} = \\ = \mathbf{F} + \omega_H \omega \{ \boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha - \boldsymbol{\tau}_2 \cos \alpha \}. \end{aligned} \quad (25.24)$$

Умножая уравнение (25.24) последовательно на  $\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \alpha$  и  $\boldsymbol{\tau}_2 \cos \alpha - \boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha$ , получим уравнения для  $\frac{du}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_0) - \omega \left\{ \boldsymbol{\tau}_0 \frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_0 \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dt} \sin \alpha \right\}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_1) \cos \alpha + (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_2) \sin \alpha - u (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \alpha) \frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{dt}, \\ w \frac{d\alpha}{dt} &= -\omega_H \omega + F \{ \boldsymbol{\tau}_2 \cos \alpha - \boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha \} - \\ &- \{ \boldsymbol{\tau}_2 \cos \alpha - \boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha \} \left\{ u \frac{d\boldsymbol{\tau}_0}{dt} + \omega \left( \frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dt} \cos \alpha + \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dt} \sin \alpha \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (25.25)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}_i}{dt} &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\tau}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} + u (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_i + \\ &+ \omega \{ (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_i \cos \alpha + (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_i \sin \alpha \} \quad (i = 0, 1, 2) \end{aligned} \quad (25.26)$$

и

$$\boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) + \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) + \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) = \nabla. \quad (25.27)$$

Положим  $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} = 0$ , т. е. будем считать, что магнитное поле не зависит от времени, хотя этого ограничения можно было бы не делать. Тогда с помощью соотношений (25.26), (25.27) уравнения (25.25)

принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & (\mathbf{F}\tau_0) + \frac{\omega^2}{2} \operatorname{div} \tau_0 + uw \{ \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \cos \alpha + \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \sin \alpha \} + \\ & + \frac{\omega^2}{2} \{ \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0 \} \cos 2\alpha + \frac{\omega^2}{2} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 \} \sin 2\alpha, \quad (25.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & -\frac{uw}{2} \operatorname{div} \tau_0 + \{ (\mathbf{F}\tau_1) - u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} \cos \alpha + \\ & + \{ (\mathbf{F}\tau_2) - u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} \sin \alpha - \frac{uw}{2} \{ \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0 \} \cos 2\alpha - \\ & - \frac{uw}{2} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 \} \sin 2\alpha, \quad (25.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -\omega_H - \frac{u}{2} \{ \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + 2\tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_1 \} + \\ & + \frac{1}{w} \{ [\mathbf{F}\tau_2] - u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 + w^2 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 \} \cos \alpha + \\ & + \frac{1}{w} \{ -(\mathbf{F}\tau_1) + u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - w^2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1 \} \sin \alpha - \\ & - \frac{u}{2} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla) \tau_0 + \tau_2 (\tau_1 \nabla) \tau_0 \} \cos 2\alpha + \frac{u}{2} \{ \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_0 - \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_0 \} \sin 2\alpha. \quad (25.30) \end{aligned}$$

К этим уравнениям нужно еще добавить второе из уравнений (25.22)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = u\tau_0 + w \{ \tau_1 \cos \alpha + \tau_2 \sin \alpha \}. \quad (25.31)$$

Уравнения движения заряженной частицы в неоднородных полях в форме (25.28)–(25.31) удобны для применения вышеизложенного метода асимптотического приближения в случае магнитных полей, мало отклоняющихся от однородных и удовлетворяющих условию (25.19).

Произведем в системе (25.28)–(25.31) замену переменных, аналогичную замене (25.16):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \bar{\mathbf{r}} + \frac{w}{\omega_H} (\tau_2 \cos \bar{\alpha} - \tau_1 \sin \bar{\alpha}), \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{1}{\omega_H} (g_1 \cos \bar{\alpha} - f_1 \sin \bar{\alpha}) + \frac{w}{\omega^2} (\tau_1 \cos \bar{\alpha} + \tau_2 \sin \bar{\alpha}) \nabla \omega_H + \\ &\quad + \frac{1}{2\omega_H} (g_2 \cos 2\bar{\alpha} - f_2 \sin 2\bar{\alpha}), \\ u &= \bar{u} - \frac{1}{\omega_H} \sum_{n=1,2} \frac{1}{n} \{ -G_{4n} \cos n\bar{\alpha} + F_{4n} \sin n\bar{\alpha} \}, \\ w &= \bar{w} - \frac{1}{\omega_H} \sum_{n=1,2} \frac{1}{n} \{ -G_{5n} \cos n\bar{\alpha} + F_{5n} \sin n\bar{\alpha} \}, \end{aligned} \right\} \quad (25.32)$$

где  $u$  и  $w$  соответствуют переменным  $x_4$ ,  $x_5$  системы (25.1) и  $\omega_H = -\lambda\omega$ ;  $f_n$ ,  $g_n$ ,  $F_{4n}$ ,  $G_{4n}$ ,  $F_{5n}$ ,  $G_{5n}$  – коэффициенты при соответствующих гармо-

никах в уравнениях (25.28) – (25.31):

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{w} \{ (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_2) - u^2 \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 + w^2 \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_2 \}, \\ f_2 &= \frac{1}{w} \{ -(\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_1) + u^2 \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 - w^2 \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_1 \}, \\ f_3 &= -\frac{u}{2} \{ \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 \}, \\ g_2 &= \frac{u}{2} \{ \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 \}. \\ F_{41} &= uw \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0, \quad F_{42} = \frac{w^2}{2} \{ \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 \}, \\ F_{51} &= (\boldsymbol{\tau}_1 \mathbf{F}) - u^2 \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0, \\ F_{52} &= -\frac{uw}{2} [\boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0], \\ G_{41} &= uw \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0, \\ G_{42} &= \frac{w^2}{2} \{ \boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 \}, \\ G_{51} &= (\boldsymbol{\tau}_2 \mathbf{F}) - u^2 \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0, \\ G_{52} &= -\frac{uw}{2} [\boldsymbol{\tau}_1 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0]. \end{aligned} \right\} \quad (25.33)$$

Первая формула системы (25.32) выражает вращение частицы по ларморовской окружности вокруг среднего положения, вторая, третья и четвертая формулы описывают влияние неоднородностей поля и внешней силы на угол вращения  $\alpha$  и компоненты скорости  $u$  и  $w$ .

Уравнения (25.28) – (25.31) в результате преобразования (25.32) уже не будут содержать угловой переменной  $\alpha$ . В дальнейшем изложении будем всюду опускать знаки усреднения при переменных, обозначая  $\mathbf{r}$ ,  $u$ ,  $w$  просто  $\mathbf{r}$ ,  $u$ ,  $w$ , что не может привести к путанице, так как далее мы будем иметь дело лишь с усредненными переменными.

Все расчеты будем вести с точностью до членов, пропорциональных  $\frac{1}{\omega_H}$ . Тогда в приближенных уравнениях для  $\frac{du}{dt}$  и  $\frac{dw}{dt}$ , как будет ясно из дальнейшего, достаточно сохранить лишь члены нулевого порядка относительно  $\frac{1}{\omega_H}$ .

В нулевом приближении уравнения (25.28) и (25.29) дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_0) + \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{uw}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0, \end{aligned} \right\} \quad (25.34)$$

так как

$$\left. \begin{aligned} X_{40} &= (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}_0) + \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0, \\ X_{50} &= -\frac{uw}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0. \end{aligned} \right\} \quad (25.35)$$

Из системы (25.34) следует закон сохранения энергии для усредненного движения. В самом деле, умножая первое уравнение системы (25.34)

на  $u$ , а второе на  $w$  и складывая, получим:

$$u \frac{du}{dt} + w \frac{dw}{dt} = u (\mathbf{F} \tau_0) = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dt},$$

где  $V$  — потенциальная энергия частицы.

Следовательно,

$$\frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{V}{m} = \text{const.} \quad (25.36)$$

Найдем из второго уравнения системы (25.34) адиабатический инвариант. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -\frac{uw}{2} \left( \mathbf{H} \nabla \left( \frac{1}{H} \right) \right) = -\frac{Hw}{2} \left( \mathbf{u} \nabla \left( \frac{1}{H} \right) \right) = \\ &= -\frac{Hw}{2} \left( \frac{dr}{dt} \nabla \left( \frac{1}{H} \right) \right) = -\frac{Hw}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right), \end{aligned} \quad (25.37)$$

так как  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  и  $u \tau_0 \approx \frac{dr}{dt}$ .

В результате интегрирования уравнения (25.37) получим:

$$\frac{w^2}{H} = \text{const.} \quad (25.38)$$

Таким образом, величина  $\frac{w^2}{H}$  является адиабатическим инвариантом, т. е. сохраняется не точно, а лишь с точностью до членов порядка  $\frac{1}{\omega_H^2}$ .

Можно было бы дополнить выражение (25.38) высшими членами по  $\frac{1}{\omega_H}$ , начиная с первого, и получить явное выражение для приближенного интеграла движения, сохраняющего свое значение с любой наперед заданной точностью.

Физический смысл адиабатической инвариантности величины  $\frac{w^2}{H}$  состоит в том, что магнитный поток через лармировскую окружность является величиной постоянной с точностью до членов порядка малости  $\frac{1}{\omega_H}$ .

Уравнение (25.31) в результате преобразования (25.32) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u \tau_0 + \frac{w}{2\omega_H} (\tau_1 f_1 + \tau_2 g_1) + \\ &+ \frac{w^2}{2\omega_H^2} ((\tau_2 \nabla) \tau_1 - (\tau_1 \nabla) \tau_2) + \frac{1}{2\omega_H} (\tau_1 G_{51} - \tau_2 F_{51}) - \\ &- \frac{w^2}{2\omega_H^2} (\tau_1 (\tau_2 \nabla \omega_H) - \tau_2 (\tau_1 \nabla \omega_H)) + O \left( \frac{1}{\omega_H^3} \right) \end{aligned} \quad (25.39)$$

с учетом

$$\begin{aligned} w(\tau_1 f_1 + \tau_2 g_1) + \tau_1 G_{51} - \tau_2 F_{51} &= \\ &= \tau_1 \{ 2(\tau_2 F) - 2u^2 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 + w^2 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 \} + \\ &+ \tau_2 \{ -2(\tau_1 F) + 2u^2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - w^2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1 \}. \end{aligned}$$

Уравнение (25.39) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u \tau_0 + \frac{1}{\omega_H} \{ \tau_1 (\mathbf{F} \tau_2) - \tau_2 (\mathbf{F} \tau_1) \} - \frac{u^2}{\omega_H} \{ \tau_1 \tau_2 (\tau_0 \nabla) \tau_0 - \tau_2 \tau_1 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} + \\ &+ \frac{w^2}{2\omega_H} \{ \tau_1 \tau_1 (\tau_1 \nabla) \tau_2 - \tau_2 \tau_2 (\tau_2 \nabla) \tau_1 \} + \frac{w^2}{2\omega_H} \{ (\tau_2 \nabla) \tau_1 - (\tau_1 \nabla) \tau_2 \} - \\ &- \frac{w^2}{2\omega_H} \{ \tau_1 (\tau_2 \nabla \omega_H) - \tau_2 (\tau_1 \nabla \omega_H) \} + O \left( \frac{1}{\omega_H^3} \right), \end{aligned} \quad (25.40)$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \tau_0 \left\{ u + \frac{\omega^2}{2\omega_H} (\tau_0 \operatorname{rot} \tau_0) \right\} + \tau_0 \times \left\{ -\frac{1}{\omega_H} \mathbf{F} + \frac{\omega^2}{2\omega_H^2} \nabla \omega_H + \frac{u^2}{\omega_H} (\tau_0 \nabla) \tau_0 \right\}, \quad (25.41)$$

так как

$$\begin{aligned} \tau_1(\mathbf{F}\tau_2) - \tau_2(\mathbf{F}\tau_1) &= [\mathbf{F} \times \tau_0], \\ \tau_1\tau_2(\tau_0 \nabla) \tau_0 - \tau_2\tau_1(\tau_0 \nabla) \tau_0 &= [(\tau_0 \nabla) \tau_0 \times \tau_0], \\ (\tau_2 \nabla) \tau_1 - (\tau_1 \nabla) \tau_2 &= \tau_0(\tau_0 \operatorname{rot} \tau_0) - \tau_1\tau_1(\tau_1 \nabla) \tau_2 + \tau_2\tau_2(\tau_2 \nabla) \tau_1. \end{aligned}$$

В уравнении (25.41) можно пренебречь малой поправкой

$$\frac{\omega^2}{2\omega} (\tau_0 \operatorname{rot} \tau_0) \tau_0$$

к главному продольному члену  $u\tau_0$ .

Нетрудно видеть, что в уравнении (25.41) в принятом приближении члены, перпендикулярные к полю  $\mathbf{H}$ , начинаются с членов порядка  $\frac{1}{\omega_H}$ , а параллельные полю  $\mathbf{H}$  определены лишь с точностью до  $\frac{1}{\omega_H^2}$ . Сохраняя ту же точность, к этому уравнению можно добавить величины типа  $\tau_0 \frac{c}{\omega_H}$ . В самом деле, если от нашего  $\mathbf{r}$  перейдем к другому (см. замечание о «неоднозначности») заменой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{нов}} + \frac{\tau_0}{\omega_H^2} f(x, \mathbf{r}), \quad (25.42)$$

смещающей  $\mathbf{r}$  вдоль линии магнитного поля на величину порядка  $\frac{1}{\omega_H^2}$ , пренебрегаемую в принятой степени точности, то при дифференцировании (25.42), кроме несущественных членов порядка  $\frac{1}{\omega_H^2}$ , добавятся еще члены  $\frac{\tau_0}{\omega_H} f'_x$ .

Воспользуемся указанным произволом и определим, например,  $u$  так, чтобы оно точно равнялось компоненте скорости  $\frac{dr}{dt}$  центра ларморовской окружности, параллельной магнитному полю. Тогда новое  $u$  будет равняться старому  $u$  плюс  $\frac{L}{\omega_H}$ . В уравнениях (25.41) можно заменить просто  $u$  старое на  $u$  новое, ибо разность между этими величинами по порядку величины меньше, чем члены, удержанные в (25.41).

Таким образом, окончательно мы получаем следующую систему уравнений, определяющих движение центра ларморовской окружности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (\mathbf{F}\tau_0) + \frac{\omega^2}{2} \operatorname{div} \tau_0, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{u\omega}{2} \operatorname{div} \tau_0, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \tau_0 u + \tau_0 \times \left\{ -\frac{1}{\omega_H} \mathbf{F} + \frac{\omega^2}{2\omega_H^2} \nabla \omega_H + \frac{u^2}{\omega_H} (\tau_0 \nabla) \tau_0 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (25.43)$$

Нетрудно усмотреть, каков физический смысл различных членов в уравнениях (25.43):  $\tau_0 u$  — составляющая вектора скорости частицы, направ-

ленная по магнитному полю;

$$\frac{1}{\omega_H} [\mathbf{F}\tau_0] = \frac{c}{H^2} [\mathbf{EH}] \quad (E \ll H)$$

—скорость дрейфа частицы под действием электрического и магнитного поля

$$\frac{\omega^2}{2\omega_H^2} [\tau_0 \times \text{grad } \omega_H] = \frac{mc\omega^2}{2eH^3} [\mathbf{H} \times \nabla H]$$

—скорость дрейфа, вызванная неоднородностью магнитного поля;

$$-\frac{u^2}{\omega_H} [(\tau_0 \nabla) \tau_0 \times \tau_0] = -\frac{u^2}{\omega_H R} [\mathbf{n}\tau], \quad |\mathbf{n}| = 1$$

(где  $R$  — радиус кривизны линий магнитного поля,  $\mathbf{n}$  — главная нормаль к линиям магнитного поля) — скорость дрейфа, вызванная кривизной линий магнитного поля, или скорость «центробежного» дрейфа.

Последнее уравнение системы (25.43) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u \frac{\omega_H}{\omega} + \frac{v^2 + u^2}{2\omega_H^3} [\omega_H \times \nabla \omega_H] + \frac{1}{\omega_H^2} [\mathbf{F}\omega_H] + \\ + \frac{u^2}{\omega_H^2} \left\{ \text{rot } \omega_H - \frac{\omega_H}{\omega_H^2} (\omega_H \text{rot } \omega_H) \right\}, \quad (25.44) \\ \mathbf{v}^2 = u^2 + \omega^2, \end{aligned}$$

где положено  $\omega_H = \omega_H \tau_0$  и учтено тождество  $(\tau_0 \nabla) \tau_0 = -[\tau_0 \text{rot } \tau_0]$ , или в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = u \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{EH}] + \frac{mc(v^2 + \omega^2)}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H] + \\ + \frac{mcu^2}{eH^2} \left\{ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H}}{H^2} (\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}) \right\}. \quad (25.45) \end{aligned}$$

В частном случае, если  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ , уравнение (25.45) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = u \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{EH}] + \frac{mc(v^2 + u^2)}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H]. \quad (25.46)$$

Уравнения (25.43) описывают движение центра ларморовской окружности с точностью до членов  $\frac{1}{\omega_H^2} *$ .

Заметим в заключение, что вышеизложенный общий асимптотический метод усреднения при быстром вращающейся фазе может быть использован также для исследования гироскопических систем.

---

\*) Заметим, что рассмотренный пример решен во втором приближении С. И. Брагинским (Украинский математический журнал, т. VIII, 1956).

## ГЛАВА VI

### ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

#### § 26. Обоснование метода усреднения

Проблема обоснования асимптотических методов может исследоваться с различных точек зрения.

Можно, например, искать условия, при которых разность между точным решением и его асимптотическим приближением для достаточно малых значений параметра становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени.

Можно также поставить и значительно более сложные задачи, пытаясь устанавливать соответствие между такими свойствами точных и приближенных решений, которые зависят от их поведения на бесконечном интервале.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать первую задачу как более простую.

Поскольку излагавшиеся ранее асимптотические методы допускают приведение к методу усреднения, мы для общности сформулируем ее применительно к системе дифференциальных уравнений в стандартной форме.

Итак, будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (26.1)$$

( $x, X$  — точки  $n$ -мерного евклидова пространства) с малым параметром  $\varepsilon$ . Построим для нее соответствующую систему усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (26.2)$$

и приступим к доказательству теоремы, устанавливающей, что при весьма общих условиях разность  $x(t) - \xi(t)$  может быть сделана сколь угодно малой для достаточно малого  $\varepsilon$  на сколь угодно большом интервале  $0 < t < T$ . Так как  $\xi(t)$  зависит от  $t$  через посредство произведения  $\varepsilon t$ , то для того, чтобы в течение указанного интервала времени  $\xi$  могло успеть значительно отойти от своего начального значения, т. е. чтобы этот интервал оказался достаточно длительным с точки зрения изменения  $\xi$ , за  $T$  следует брать величину порядка  $\frac{L}{\varepsilon}$ , где  $L$  может быть сделано сколь угодно большим при достаточно малом  $\varepsilon$ .

Сформулируем поэтому утверждение о малости ошибки  $x(t) - \xi(t)$  первого приближения следующим образом.

Теорема. Если функция  $X(t, x)$  удовлетворяет условиям:

а) Для некоторой области  $D$  можно указать такие положительные постоянные  $M$  и  $\lambda$ , что для всех вещественных значений  $t \geq 0$  и для

любых точек  $x, x', x''$  из этой области удовлетворяются неравенства

$$|X(t, x)| \leq M; |X(t, x') - X(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|. \quad (26.3)$$

б) Равномерно по отношению к  $x$  в области  $D$  существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x). \quad (26.4)$$

Тогда любым, сколь угодно малым положительным  $\rho$ , и сколь угодно большому  $L$  можно сопоставить такое положительное  $\varepsilon_0$ , что если  $\xi = \xi(t)$  есть решение уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

определенное в интервале  $0 < t < \infty$  и лежащее в области  $D$  вместе со всей своей  $\rho$ -окрестностью \*), то для  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  в интервале  $[0 < t < \frac{L}{\varepsilon}]$  справедливо неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta,$$

в котором  $x = x(t)$  представляет решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

совпадающее с  $\xi(t)$  при  $t = 0$ .

**Доказательство.** Фиксируем некоторое положительное число  $a$  и строим функцию

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a \left\{ 1 - \frac{|x|^2}{a^2} \right\}^2, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (26.5)$$

где положительная постоянная  $A_a$  определяется соотношением

$$\int_{E_n} \Delta_a(x) dx = 1, \quad (26.6)$$

в котором интегрирование выполняется по всему рассматриваемому пространству  $E_n$ ;  $dx$  обозначает бесконечно малый элемент обычного  $n$ -мерного евклидова объема.

Очевидно, введенная функция  $\Delta_a(x)$  ограничена вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Так как эта функция и ее производные тождественно равны нулю для  $|x| > a$ , нетрудно убедиться, что интеграл

$$I_a = \int_{E_n} \left| \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} \right| dx \quad (26.7)$$

оказывается конечным для всякого положительного  $a$ .

\*) Мы будем называть  $\rho$ -окрестностью некоторого множества  $A$  множество всех точек, расстояние которых до  $A$  меньше  $\rho$ .

Заметив это, рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \int_D \Delta_a(x - x') \left\{ \int_0^t [X(t, x') - X_0(x')] dt \right\} dx'. \quad (26.8)$$

В силу условия б) можно построить такую монотонно убывающую функцию  $f(t)$ , стремящуюся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , что во всей области  $D$

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t [X(t, x) - X_0(x)] dt \right| \leq f(t). \quad (26.9)$$

Имеем поэтому

$$|u(t, x)| \leq tf(t) \int_D \Delta_a(x - x') dx' \leq tf(t) \int_{E_n} \Delta_a(x - x') dx' = tf(t) \int_{E_n} \Delta_a(x') dx',$$

т. е.

$$|u(t, x)| \leq tf(t). \quad (26.10)$$

Далее имеем:

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right| \leq tf(t) \int_D \left| \frac{\partial \Delta_a(x - x')}{\partial x} \right| dx' \leq tf(t) \int_{E_n} \left| \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} \right| dx,$$

или ввиду (26.7)

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right| \leq I_a t f(t). \quad (26.11)$$

С другой стороны, благодаря условию а)

$$|X_0(x)| \leq M; \quad |X_0(x') - X_0(x'')| \leq \lambda |x' - x''|; \quad x, x', x'' \in D, \quad (26.12)$$

и потому

$$|X(t, x') - X_0(x') - X(t, x) + X_0(x)| \leq 2\lambda |x' - x|; \quad x, x' \in D. \quad (26.13)$$

Заметим теперь из (26.8), что

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \int_D \{X(t, x') - X_0(x')\} \Delta_a(x - x') dx',$$

откуда на основании (26.13) убеждаемся, что в области  $D$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \{X(t, x) - X_0(x)\} \int_D \Delta_a(x - x') dx' \right| \leq 2\lambda a. \quad (26.14)$$

Но по определению функции  $\Delta_a(x)$  для любой точки  $x$ ,  $a$ -окрестность которой принадлежит  $D$ , имеем:

$$\int_D \Delta_a(x - x') dx' = \int_{|x-x'| < a} \Delta_a(x - x') dx' = 1,$$

и таким образом, соотношение (26.14) для таких точек дает:

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - X(t, x) + X_0(x) \right| \leq 2\lambda a. \quad (26.15)$$

Фиксируем теперь число  $a$  так, чтобы

$$a < \rho, \quad a < \frac{\eta^*}{8\lambda L e^{L\lambda}}, \quad \text{где } \eta^* = \min(\eta, \rho), \quad (26.16)$$

и введем функции

$$F(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leq L} \left| \tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right|; \quad \Phi(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t t f(t) dt.$$

Имеем, очевидно,

$$F(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad \Phi(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Поэтому можем найти столь малое положительное  $\varepsilon_0$ , чтобы для всякого положительного  $\varepsilon$ , не превосходящего  $\varepsilon_0$ , удовлетворялись неравенства

$$F(\varepsilon) < a; \quad F(\varepsilon) < \frac{\eta^*}{2}; \quad \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \leq \frac{\eta^*}{4L^2 e^{L\lambda} (\lambda + I_a M)}. \quad (26.17)$$

Произведя такой выбор, рассмотрим выражение

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon u(t, \xi(t)), \quad (26.18)$$

где  $\xi(t)$  есть решение уравнения (26.2), принадлежащее со своей  $\rho$ -окрестностью к области  $D$ . Благодаря (26.10), (26.16), (26.17) имеем:

$$|\varepsilon u(t, \xi)| \leq \varepsilon t f(t) \leq F(\varepsilon) < a < \rho \quad (26.19)$$

в интервале

$$0 < t < \frac{L}{\varepsilon}, \quad (26.20)$$

и потому в этом интервале  $\bar{x}(t) \in D$ .

Имеем далее:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - \varepsilon X(t, \bar{x}) = R, \quad (26.21)$$

где

$$R = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon u) = \varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - X(t, \xi) + X_0(\xi) \right\} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \{X(t, \xi) - X(t, \xi + \varepsilon u)\}.$$

Отсюда вследствие неравенства, (26.10), (26.11), (26.12), (26.15) получаем:

$$|R| \leq 2\lambda a \varepsilon + I_a M \varepsilon^2 t f(t) + \lambda \varepsilon^2 t f(t)$$

и, таким образом, в рассматриваемом интервале (26.20) найдем:

$$\int_0^t e^{\varepsilon \lambda (t-\tau)} |R(\tau)| d\tau \leq e^{L\lambda} \int_0^{L/\varepsilon} |R(t)| dt \leq \left\{ 2\lambda a L + (I_a M + \lambda) L^2 \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \right\} e^{\lambda L},$$

или ввиду (26.16), (26.17)

$$\int_0^t e^{\varepsilon \lambda (t-\tau)} |R(\tau)| d\tau < \frac{\eta^*}{4} + \frac{\eta^*}{4} = \frac{\eta^*}{2},$$

так что

$$\int_0^t e^{\varepsilon \lambda (t-\tau)} |R(\tau)| d\tau < \frac{\eta}{2}; \quad \int_0^t e^{\varepsilon \lambda (t-\tau)} |R(\tau)| d\tau < \frac{\rho}{2}. \quad (26.22)$$

Пусть теперь  $x = x(t)$  представляет решение уравнения (26.1), для которого  $x(0) = \xi(0)$ .

Тогда в интервале

$$0 < t < t^*, \quad t^* \leq \frac{L}{\varepsilon}, \quad (26.23)$$

в котором  $x(t) \in D$ , можно написать:

$$|X(t, x) - X(t, \bar{x})| \leq \lambda |x - \bar{x}|,$$

откуда благодаря (26.21) замечаем, что

$$\left| \frac{d(x - \bar{x})}{dt} \right| \leq \lambda \varepsilon |x - \bar{x}| + |R(t)|,$$

и так как разность  $x - \bar{x}$  аннулируется при  $t = 0$ , то

$$|x - \bar{x}| \leq \int_0^t e^{\varepsilon \lambda (\tau - \tau)} |R(\tau)| d\tau.$$

Поэтому на основании (26.22) видим, что в интервале (26.23) выполняются неравенства

$$|x - \bar{x}| < \frac{\eta}{2}, \quad |x - \xi| < \frac{\rho}{2},$$

из которых вследствие (26.18), (26.19) убеждаемся, что

$$|x - \xi| < \frac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta; \quad |x - \xi| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) < \rho. \quad (26.24)$$

Покажем теперь, что число  $t^*$  может быть взято равным  $\frac{L}{\varepsilon}$ .

В самом деле, если этого сделать нельзя, то неравенство

$$|x - \xi| < \rho \quad (26.25)$$

не может выполняться во всем интервале  $(0, \frac{L}{\varepsilon})$ , так как в последнем случае мы имели бы  $x(t) \in D$  для всякого  $t$  из  $(0, \frac{L}{\varepsilon})$ . Но так как неравенство (26.25) заведомо выполняется для достаточно малых  $t$ , то из соображений непрерывности ясно, что существует такое  $t_1$ , что в интервале  $(0, t_1)$  это неравенство выполняется и, кроме того,

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| > \rho - \delta, \quad (26.26)$$

где  $\delta$  может быть взято любое сколь угодно малое число. Возьмем

$$\delta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho}{2} - F(\varepsilon) \right\} \quad (26.27)$$

и положим  $t^* = t_1$ , что возможно, так как на сегменте  $[0, t_1]$  точка  $x(t)$  принадлежит к области  $D$ . Но тогда в силу (26.24)

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) = \rho - 2\delta < \rho - \delta,$$

что противоречит (26.26).

Итак, можем положить  $t^* = \frac{L}{\varepsilon}$ , и неравенства (26.24) оказываются справедливыми в интервале  $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ , что и завершает доказательство нашей теоремы.

Заметим теперь, что если область  $D$  ограничена (лежит в ограниченной части рассматриваемого евклидова пространства), то в условии б) можно исключить требование равномерности и сформулировать б) как условие существования предела (26.4) в каждой точке этой области.

В самом деле, ввиду условия а) функции

$$F_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt$$

удовлетворяют неравенству

$$|F_T(x') - F_T(x'')| \leq \lambda |x' - x''|,$$

и таким образом, последовательность этих функций при  $T \rightarrow \infty$  является равностепенно-непрерывной. Но так как область  $D$ , будучи ограниченной, компактна, то всякая равностепенно-непрерывная последовательность, сходящаяся в каждой точке  $D$ , оказывается вместе с тем и равномерно сходящейся.

Заметим далее, что так как для всякой почти периодической функции  $f(t)$  существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

то в случае ограниченности области  $D$  условие б) удовлетворяется, если выражение  $X(t, x)$  для каждого  $x$  из  $D$  оказывается почти периодической функцией переменной  $t$ .

Мы рассматривали здесь вопрос о погрешности первого приближения. Однако не представляет никаких затруднений получить асимптотические оценки погрешности и для высших приближений.

## § 27. Преобразование основной системы уравнений

В настоящем параграфе остановимся на рассмотрении задач второго типа, т. е. на установлении соответствия между такими свойствами точных и приближенных решений системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (27.1)$$

которые зависят от поведения этих решений на бесконечном интервале времени.

Вначале рассмотрим простейший случай, когда уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (27.2)$$

имеют «квазистатическое» решение, соответствующее точке равновесия

$$\xi = \xi_0; \quad X_0(\xi_0) = 0. \quad (27.3)$$

Тогда для решений этих уравнений, бесконечно близких к  $\xi_0$ , имеем уравнения в вариациях:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = H\delta\xi, \quad H = \left( \frac{\partial X_0(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (27.4)$$

которые являются однородными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим характеристическое уравнение, соответствующее уравнениям (27.4):

$$\operatorname{Det} |pI - H| = 0, \quad (27.5)$$

и представим общее решение системы (27.4) в виде:

$$\delta\xi(t) = \sum_{(1 \leq s \leq n)} C_s u_s(\tau), \quad (27.6)$$

где  $C_s$  — произвольные постоянные, а  $u_s(\tau)$  — линейно независимые частные решения, соответствующие отдельным корням характеристического уравнения (27.5).

Для простого корня  $p = p_s$

$$u_s(\tau) = e^{p_s \tau}. \quad (27.7)$$

Если этот корень кратный, то

$$u_s(\tau) = P_s(\tau) e^{p_s \tau}, \quad (27.8)$$

причем  $P_s(\tau)$  будет полиномом по отношению к  $\tau$  степени не выше порядка кратности  $p_s$ .

Таким образом, если все корни данного характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то  $\delta\xi$  экспоненциально стремятся к нулю.

Допустим, что  $s$  корней  $p_1, p_2, \dots, p_s$  имеют отрицательные вещественные части, а у остальных  $n-s$  корней  $p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_n$  вещественные части все положительны.

Рассмотрим в этом случае  $s$ -мерное многообразие точек  $\delta\xi_0$ , которое будем обозначать через  $\mathfrak{M}_{t_0}$ , характеризующееся тем, что

$$\delta\xi_0 = \sum_{1 \leq j \leq s} C_j u_j(\tau_0), \quad (27.9)$$

или в общем случае

$$\delta\xi_0 = \sum_{1 \leq j \leq s} C_j P_j(\tau_0) e^{p_j \tau_0}, \quad (27.10)$$

где все  $p_j (j = 1, 2, \dots, s)$  имеют отрицательные вещественные части.

Тогда для функций  $\delta\xi(t)$ , имеющих своими начальными значениями величины (27.10), получим:

$$\delta\xi(t_0) = \sum_{1 \leq j \leq s} C_j u_j(\tau_0), \quad (27.11)$$

откуда видим, что в этом случае при  $t \rightarrow \infty$   $\delta\xi(t)$  будут стремиться к нулю.

Другими словами, если  $\delta\xi(t_0)$  лежит на многообразии  $\mathfrak{M}_{t_0}$ , то тогда  $\delta\xi(t)$  экспоненциально стремятся к нулю; если же  $\delta\xi(t_0)$  не лежат на этом многообразии, то  $\delta\xi(t)$ , начиная с достаточно больших  $t$ , будет неограниченно удаляться от  $\mathfrak{M}_{t_0}$ . В частности, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения (27.5) положительны, многообразие  $\mathfrak{M}_{t_0}$  вырождается в точку  $\delta\xi(t_0) = 0$ , и любое, отличное от нуля, решение  $\delta\xi(t)$  с течением времени не будет стремиться к нулю, а наоборот, с течением времени  $\delta\xi(t)$  будет неограниченно удаляться от  $\mathfrak{M}_{t_0}$ .

Если вещественные части некоторых корней характеристического уравнения (27.5) равны нулю, то уравнения (27.4) обладают соответствующими этим корням решениями вида

$$\delta \xi(t) = e^{i\nu t} \quad (27.12)$$

с вещественными  $\nu$ . Однако в этом случае произвольно малое изменение формы уравнений, например внесение нелинейных членов, может радикально изменить поведение решений, вызвать затухание или раскачивание колебаний типа (27.12). Наоборот, если вещественные части всех корней характеристического уравнения (27.5) отличны от нуля, поведение решений оказывается менее чувствительным к введению малых добавок.

В этом случае можно доказать теоремы, устанавливающие, что решения точных уравнений (27.1), лежащие в окрестности  $\xi_0$ , где  $\xi_0$  — квазистатическое решение усредненных уравнений (27.2), обладают свойствами, являющимися естественным обобщением свойств решений (27.6)  $\delta \xi = \delta \xi(t)$ , о которых шла речь выше. Иначе говоря, можно доказать теоремы, устанавливающие, что при определенных условиях разность между любым решением точных уравнений (27.1) и квазистатическим (квазистационарным) решением уравнений (27.1), начальные значения которых будут принадлежать некоторому точечному многообразию, размерность которого равна числу корней характеристического уравнения (27.5) с отрицательными вещественными частями, с течением времени стремится к нулю.

Разумеется, для точных уравнений (27.1) роль квазистатического решения будет играть некоторое специальное решение, близкое к  $\xi_0$ , но, вообще зависящее от времени.

Действительно, уже «улучшенное первое приближение»

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \widetilde{X}(t, \xi_0) = \xi_0 + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} \frac{X_\nu(\xi_0)}{i_\nu} e^{i\nu t} \quad (27.13)$$

будет зависеть от времени, причем в нем будут появляться колебания с внешними частотами, присутствующими в выражении

$$X(t, x) = \sum_\nu X_\nu(x) e^{i\nu t}. \quad (27.14)$$

Введем еще некоторые определения. Пусть каждому  $t$  из интервала  $(-\infty, \infty)$  соответствует некоторое множество  $S_t$  точек  $x$ , которое можно представить аналитически в параметрической форме уравнениями вида

$$x = f(t, C_1, C_2, \dots, C_s),$$

где  $f(t, C_1, C_2, \dots, C_s)$  удовлетворяют условиям Липшица по отношению к параметрам  $C_1, C_2, \dots, C_s$  во всей области их изменения.

Мы будем говорить тогда, что  $S_t$  есть  $s$ -мерное интегральное многообразие для уравнения (27.1), если для всякого решения  $x = x(t)$  этого уравнения из соотношения

$$x(t) \in S_t,$$

справедливого в какой-то момент времени  $t = t_0$ , вытекает его справедливость для любого вещественного  $t$ .

Для доказательства теорем о поведении точных решений в окрестности  $\xi_0$  нам понадобятся, кроме условия неравенства нулю веществен-

ственных частей корней характеристического уравнения (27.5), лишь самые общие условия.

Итак, предположим, что:

а) функция  $X(t, x)$  и ее частные производные первого порядка по  $x$  ограничены и равномерно непрерывны по отношению к  $x$  в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho, \quad (27.15)$$

где  $D_\rho$  — некоторая  $\rho$ -окрестность точки  $\xi_0$ ;

б) в каждой точке области  $D_\rho$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x) dt \rightarrow X_0(x) \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (27.16)$$

равномерно по отношению к  $t$  в интервале  $(-\infty, \infty)$ .

Положив в (27.1)

$$x = \xi_0 + b, \quad (27.17)$$

где  $\xi_0$  — квазистатическое решение уравнения (27.2) и учитывая при этом (27.4), основное уравнение (27.1) можно представить в виде

$$\frac{db}{dt} = \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, b), \quad (27.18)$$

где

$$B(t, b) = Z(t, \xi_0 + b) + X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - \left( \frac{\partial X(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} b, \quad (27.19)$$

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x), \quad (27.20)$$

При этом в силу а) и б) в  $\rho$ -окрестности точки  $b=0$  функции  $B(t, b)$ ,  $Z(t, \xi_0 + b)$  и их частные производные первого порядка по  $b$  ограничены и равномерно непрерывны по отношению к  $b$  в области

$$-\infty < t < \infty, \quad |b| \leq \rho. \quad (27.21)$$

Кроме того, в каждой точке рассматриваемой окрестности  $|b| \leq \rho$  согласно (27.16) и (27.20) имеем:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z(t, \xi_0 + b) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (27.22)$$

равномерно по отношению к  $t$ , откуда, очевидно, следует:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} B(t, b) dt \underset{T \rightarrow \infty}{\rightarrow} B(b) = X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - X'_0(\xi_0) b. \quad (27.23)$$

Поскольку  $B(b)$  со своими частными производными первого порядка обращается в нуль при  $b=0$ , то из условия, которому, очевидно, удовлетворяет функция  $B(b)$

$$|B(b') - B(b'')| \leq \left| \frac{\partial B(b)}{\partial b} \right|_{b=\tilde{b}} |b' - b''| \quad (b' \leq \tilde{b} \leq b''),$$

следует, что при

$$|b'| < \sigma, \quad |b''| < \sigma \quad (\sigma < \rho)$$

имеет место

$$|B(b') - B(b'')| \leq \eta(\sigma) |b' - b''|, \quad (27.24)$$

где

$$\eta(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0.$$

Из выражений (27.19), (27.20) видно, что если  $X(x, t)$  имеют частные производные до  $n$ -го порядка включительно, которые являются ограниченными и равномерно непрерывными по отношению к  $b$  в области (27.21), то  $B(t, b)$  и  $Z(t, \xi_0 + b)$  также будут обладать этими свойствами.

Для дальнейшего исследования удобно уравнения (27.18) преобразовать к виду:

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \quad (27.25)$$

где  $Q(t, h, \varepsilon)$  была бы достаточно малой величиной при малых  $h$  и  $\varepsilon$ .

Однако этого преобразования мы производить не будем, так как к аналогичной форме можно привести уравнение (27.18), рассматривая более общий случай, чем изложенный выше, а именно, когда уравнения первого приближения (27.2) имеют периодическое решение:

$$x = \xi(\omega\tau).$$

Итак, приступим к исследованию случая, когда уравнения первого приближения (27.2) имеют периодическое решение, в  $\rho$ -окрестности которого функция  $X(t, x)$  обладает свойствами:

а) эта функция и ее частные производные первого порядка по  $x$  ограничены и равномерно непрерывны по отношению к  $x$  в области

$$-\infty < t < \infty, x \in D_\rho,$$

где  $D_\rho$  —  $\rho$ -окрестность периодического решения уравнений первого приближения.

б) В каждой точке  $D_\rho$ :

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x) dt \rightarrow X_0(x) \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (27.26)$$

равномерно по отношению к  $t$  в интервале  $(-\infty, \infty)$ .

Итак, пусть периодическое решение уравнений (27.2) имеет вид

$$x = \xi(\omega\tau), \quad (27.27)$$

где  $\xi(\varphi)$  — периодическая функция  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Составим для уравнений первого приближения (27.2) уравнения в вариациях, соответствующие периодическому решению (27.27).

Получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d\delta\xi}{d\tau} = X'_{0x}\{\xi(\omega\tau)\}\delta\xi. \quad (27.28)$$

В силу определения функции (27.27) тождественно имеем:

$$\omega\xi'_\varphi(\varphi) = X_0\{\xi(\varphi)\}. \quad (27.29)$$

Дифференцируя это равенство по  $\varphi$ , нетрудно убедиться, что при произвольной постоянной  $\delta u_0$  выражение

$$\delta\xi = \xi'_\varphi(\omega\tau)\delta u_0 \quad (27.30)$$

является решением уравнения в вариациях (27.4).

Прежде чем перейти к преобразованию уравнения (27.4), сделаем некоторые замечания, относящиеся к теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Как известно, на основании теорем Флоке—Ляпунова о свойствах линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами посредством преобразования типа

$$\delta\xi_k = \xi'_k(\omega\tau) \delta u_0 + \sum_{q=1}^{n-1} A_{kq}(\omega\tau) \delta u_q \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (27.31)$$

в котором  $A_{kq}(\varphi)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $q = 1, 2, \dots, n-1$ ) — периодические функции  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , обладающие непрерывными первыми производными, уравнения с периодическими коэффициентами (27.28) могут быть приведены к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau} = 0; \quad \frac{d\delta u_k}{d\tau} = \sum_{q=1}^{n-1} H_{kq} \delta u_q \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (27.32)$$

такой, что корни уравнения

$$\text{Det} \| pI_{kq} - H_{kq} \| = 0, \quad I_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q, \end{cases} \quad (27.33)$$

являются характеристическими показателями для системы (27.28).

Здесь также удобно ввести принятую нами систему матрично-векторных обозначений. Для этого введем матрицу

$$A(\varphi) = \| A_{kq}(\varphi) \| \quad (27.34)$$

из  $n$  строк и  $(n-1)$  столбцов, квадратную матрицу  $(n-1)$ -го порядка  $H = \| H_{kq} \|$  и вектор  $\delta u$  с компонентами  $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_{n-1}$ .

Тогда преобразование (27.31) и уравнение (27.32) представляются соответственно в виде:

$$\delta\xi = \xi'(\omega\tau) \delta u_0 + A(\omega\tau) \delta u, \quad (27.35)$$

$$\frac{d\delta u_0}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\delta u}{d\tau} = H \delta u. \quad (27.36)$$

При этом заметим, что как матрицы  $A(\varphi)$  и  $H$ , так и вектор  $\delta u$  являются, вообще говоря, комплексными, несмотря на то, что коэффициенты уравнения (27.28) вещественны.

Попутно установим одно соотношение, которое будет нами использовано в дальнейшем. Для этого подставим (27.35) в уравнение (27.28). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'(\varphi)}{d\varphi} \delta u_0 + \xi'(\varphi) \frac{d\delta u_0}{d\tau} + \frac{dA(\varphi)}{d\varphi} \omega \delta u + A(\varphi) \frac{d\delta u}{d\tau} = \\ = X'_{0x}\{\xi(\varphi)\} \xi'(\varphi) \delta u_0 + X'_{0x}\{\xi(\varphi)\} A(\varphi) \delta u. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $\xi'_\varphi(\omega\tau) \delta u_0$  является решением уравнений в вариациях (27.28), а также соотношение (27.36), получаем следующее тождество:

$$\frac{dA(\varphi)}{d\varphi} \omega + A(\varphi) H = X'_{0x}\{\xi(\varphi)\} A(\varphi), \quad (27.37)$$

а также

$$\frac{dA^*(\varphi)}{d\varphi} \omega + A^*(\varphi) H^* = X'_{0x}\{\xi(\varphi)\} A^*(\varphi), \quad (27.37')$$

где  $A^*(\varphi)$ ,  $H^*$  являются сопряженными по отношению к  $A(\varphi)$  и  $H$ .

Перейдем теперь к преобразованию уравнения (27.1). Для этого запишем его в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon Z(t, x), \quad (27.38)$$

где

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x). \quad (27.39)$$

Введем здесь новые переменные  $\varphi, b (b_1, \dots, b_{n-1})$  посредством формул \*):

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} \{A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*\}, \quad (27.40)$$

где  $b$  и  $b^*$  — взаимно сопряженные величины.

Подставляя (27.40) в (27.38), получим:

$$\begin{aligned} \xi'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \{A'_\varphi(\varphi)b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)b^*\} + \frac{1}{2} \left\{ A(\varphi) \frac{db}{dt} + A^*(\varphi) \frac{db^*}{dt} \right\} = \\ = \varepsilon X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} + \varepsilon Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b] \right\} = \\ = \varepsilon X_0 \{\xi(\varphi)\} + \varepsilon X'_{0x} \{\xi(\varphi)\} \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] + \\ + \varepsilon \left[ X_0 \left\{ \xi + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} - X_0 \{\xi(\varphi)\} - \right. \\ \left. - X'_{0x} \{\xi(\varphi)\} \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right] + \varepsilon Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая соотношение (27.29) и тождества (27.37), (27.37'), находим:

$$\begin{aligned} \left[ \xi'(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi)b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)b^*) \right] \left( \frac{d\varphi}{dt} - \omega \right) + \frac{1}{2} \left[ A(\varphi) \left( \frac{db}{dt} - Hb \right) + \right. \\ \left. + A^*(\varphi) \left( \frac{db^*}{dt} - H^*b^* \right) \right] = \varepsilon \left[ X_0 \left\{ \xi + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\} - \right. \\ \left. - X_0 \{\xi\} - \frac{1}{2} X'_{0x} \{\xi\} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right] + \\ + \varepsilon Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\}. \quad (27.41) \end{aligned}$$

Систему (27.41) можем представить в виде

$$\begin{aligned} \left[ \xi'(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi)b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi)b^*) \right] \left( \frac{d\varphi}{dt} - \omega \right) + \\ + \frac{1}{2} \left[ A(\varphi) \left( \frac{db}{dt} - Hb \right) + A^*(\varphi) \left( \frac{db^*}{dt} - H^*b^* \right) \right] = Y, \quad (27.42) \end{aligned}$$

где  $Y$  — вещественная функция.

Найдем из этой системы переменные

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega, \quad \frac{db}{dt} - Hb = R \quad (27.43)$$

\*.) Эта замена переменных отличается от принятой в предыдущем издании тем, что при любых комплексных  $b$  выражение  $x$  является вещественным. На необходимость сохранения вещественности  $x$  обратил наше внимание академик Л. С. Понтрягин, которому выражаем здесь нашу глубокую признательность.

таким образом, чтобы выполнялось условие \*)

$$R = R^* \quad (27.44)$$

и, следовательно, чтобы

$$\frac{db^*}{dt} - H^* b^* = R.$$

Учитывая условие (27.44), получим из системы (27.42) систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами относительно выражений (27.43):

$$\left[ \xi'(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi) b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi) b^*) \right] \left( \frac{d\varphi}{dt} - \omega \right) + \frac{1}{2} (A(\varphi) + A^*(\varphi)) R = Y. \quad (27.45)$$

Напомним здесь, что  $Y$  и  $\xi(\varphi)$  —  $n$ -мерные векторы,  $R$  и  $b$  —  $n - 1$ -мерные векторы,  $A$  — матрица имеющая  $n$  строк и  $n - 1$  столбцов.

Положим, что определитель этой системы

$$D(\varphi, b) = \left| \xi'(\varphi) + \frac{1}{2} (A'_\varphi(\varphi) b + A^{*\prime}_\varphi(\varphi) b^*), \frac{1}{2} (A(\varphi) + A^*(\varphi)) \right| \quad (27.46)$$

при  $b = 0$  отличен от нуля \*\*).

Тогда в силу непрерывности он будет отличным от нуля и в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $b = 0$ .

Условимся обозначать  $\delta$ -окрестность точки  $b = 0$ , в которой определитель  $D(\varphi, b)$  отличен от нуля, через  $U_\delta$ . Область изменения значений  $(\varphi, b)$ , для которых  $b$  изменяется в  $U_\delta$ , будем обозначать через  $\Omega U_\delta$ .

Заметим, что всегда можно найти столь малое положительное  $\delta$ , чтобы в области  $\Omega U_\delta (b, b^* \in U_\delta)$  имело место неравенство

$$\frac{1}{2} |A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*| < \rho$$

и, следовательно,

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*)$$

находилось бы в области  $D_\rho$ , где  $D_\rho$  —  $\rho$ -окрестность периодического решения  $\xi(\varphi)$ , в которой функции  $X(t, x)$  удовлетворяют условиям а) и б) (см. стр. 336).

Ввиду того, что комбинация, стоящая в скобках, является всегда вещественной, необходимость обобщения функций  $X(t, \varphi)$  на комплексные значения  $x$  не возникает.

Решая систему (27.45) в области  $U_\delta$  относительно переменных (27.43), находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b), \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, \varphi, b), \end{aligned} \right\} \quad (27.47)$$

\*) Поскольку у нас значения  $b$  комплексны, всегда имеется некоторый привод в выборе  $R$ . Выбор дополнительного условия в форме (27.44), очевидно, не является обязательным. Можно выбрать другие, быть может более удобные, формы дополнительных условий.

\*\*) Заметим, что для простоты записи зависимость  $D(\varphi, b)$  от  $b^*$  не указывается.

где \*)

$$\begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= K(\varphi, b) \left[ X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - X_0 \{\xi(\varphi)\} - X'_{0x} \{\xi(\varphi)\} \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right] + \\ &\quad + L(\varphi, b) Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\}, \\ B(t, \varphi, b) &= M(\varphi, b) \left[ X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} - X_0 \{\xi(\varphi)\} - \right. \\ &\quad \left. - X'_{0x} \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} \right] + N(\varphi, b) Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\}, \quad (27.48) \end{aligned}$$

при этом  $W(t, \varphi, b)$  и  $B(t, \varphi, b)$  являются вещественными функциями.

Здесь  $K(\varphi, b)$ ,  $L(\varphi, b)$ ,  $M(\varphi, b)$ ,  $N(\varphi, b)$  представляют собой миноны определителя (27.46), деленные на сам определитель, и являются рациональными функциями  $b$ , регулярными при  $b = 0$  (регулярными в том смысле, что  $b = 0$  не является особой точкой).

В силу свойств функций  $A(\varphi)$  коэффициенты при степенях  $b$  в выражениях для  $K(\varphi, b)$ ,  $L(\varphi, b)$ ,  $M(\varphi, b)$ ,  $N(\varphi, b)$  являются непрерывными периодическими функциями  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  и обладают непрерывными производными по  $\varphi$  до второго порядка включительно.

Так как в области  $\Omega U_\delta$  имеет место

$$\frac{1}{2} |A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*| < \rho$$

и  $\xi'(\varphi)$  в силу (27.29) тоже ограничены и, кроме того, функции  $A(\varphi)$  и  $\xi(\varphi)$  непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно, то  $K(\varphi, b)$ ,  $M(\varphi, b)$ ,  $L(\varphi, b)$ ,  $N(\varphi, b)$  в этой области также будут ограничены и непрерывны вместе со всеми своими частными производными первого порядка.

Поэтому в силу (27.39) и (27.48), где  $X(t, x)$  обладают ограниченными и равномерно-непрерывными частными производными по  $x$  до второго порядка включительно в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho,$$

следует, что в области

$$-\infty < t < \infty, \quad (\varphi, b) \in \Omega U_\delta \quad (27.49)$$

Функции  $W(t, \varphi, b)$ ,  $B(t, \varphi, b)$  и их частные производные первого порядка по  $(\varphi, b)$  также будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к  $(\varphi, b)$ .

Кроме того, из соотношений

$$\frac{1}{T} \int_t^{+T} X(t, x) dt \rightarrow X_0(x), \quad T \rightarrow \infty,$$

$$Z(t, x) = X(t, x) - X_0(x)$$

\*) Зависимость  $W(t, \varphi, b)$  и  $B(t, \varphi, b)$  от  $b^*$  ради простоты записи не указывается. В дальнейшем мы также не будем указывать зависимость функций от  $b^*$ .

имеем:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} Z(t, x) dt \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Поэтому из (27.48) следует, что в любой точке области (27.49)

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} W(t, \varphi, b) dt \rightarrow W(\varphi, b); \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} B(t, \varphi, b) dt \rightarrow B(\varphi, b) \quad (27.50)$$

равномерно по отношению к  $t$  при  $T \rightarrow \infty$ , где

$$\begin{aligned} W(\varphi, b) &= K(\varphi, b) \left[ X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - X_0 \{\xi(\varphi)\} - X'_{0x} \{\xi(\varphi)\} \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right], \\ B(\varphi, b) &= M(\varphi, b) \left[ X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - X_0 \{\xi(\varphi)\} - X'_{0x} \{\xi(\varphi)\} \cdot \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*) \right]. \end{aligned} \quad (27.51)$$

Как видно из (27.51), функции  $W(\varphi, b)$ ,  $B(\varphi, b)$  вместе со своими частными производными первого порядка при  $b=0$  обращаются в нуль. Поэтому, взяв произвольное положительное  $\sigma < \delta$ , мы можем для функций  $W(\varphi, b)$  и  $B(\varphi, b)$  написать очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} |W(\varphi', b') - W(\varphi'', b'')| &\leq \left| \frac{\partial W(\varphi, b)}{\partial \varphi} \right|_{\substack{\varphi=\tilde{\varphi} \\ b=b}} |\varphi' - \varphi''| + \left| \frac{\partial W(\varphi, b)}{\partial b} \right|_{\substack{\varphi=\tilde{\varphi} \\ b=\tilde{b}}} |b' - b''|, \\ |B(\varphi', b') - B(\varphi'', b'')| &\leq \left| \frac{\partial B(\varphi, b)}{\partial \varphi} \right|_{\substack{\varphi=\tilde{\varphi} \\ b=\tilde{b}}} |\varphi' - \varphi''| + \left| \frac{\partial B(\varphi, b)}{\partial b} \right|_{\substack{\varphi=\tilde{\varphi} \\ b=\tilde{b}}} |b' - b''| \\ (|b'| &\leq \sigma; |b''| \leq \sigma; \varphi' \leq \tilde{\varphi} \leq \varphi''; b' \leq \tilde{b} \leq b''), \end{aligned}$$

откуда следуют неравенства, справедливые в области  $\Omega U$ :

$$\begin{aligned} |W(\varphi', b') - W(\varphi'', b'')| &\leq \eta(\sigma) \{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}, \\ |B(\varphi', b') - B(\varphi'', b'')| &\leq \eta(\sigma) \{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}, \end{aligned} \quad (27.52)$$

где  $\eta(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Возвратимся к выражениям для  $W(t, \varphi, b)$  и  $B(t, \varphi, b)$  (27.48). Функции  $K(\varphi, b)$ ,  $L(\varphi, b)$ ,  $M(\varphi, b)$ ,  $N(\varphi, b)$ , как уже указывалось (см. стр. 340), являются непрерывными и периодическими функциями по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Другие функции, стоящие в выражении для  $W(t, \varphi, b)$  и  $B(t, \varphi, b)$ :

$$\begin{aligned} X_0 \left\{ \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\}, \quad X_0 \{\xi(\varphi)\}, \\ X'_{0x} \{\xi(\varphi)\}, \quad A(\varphi), \quad Z \left\{ t, \xi(\varphi) + \frac{1}{2} [A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*] \right\}, \end{aligned}$$

в силу их определения, также являются периодическими функциями  $\varphi$ . Поэтому  $W(t, \varphi, b)$ ,  $B(t, \varphi, b)$  — периодические функции  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Кроме того, если  $\{\tau_m\}$  есть такая последовательность из  $R$ , для которой разность  $X(t + \tau_m, x) - X(t, x)$  равномерно стремится к нулю

в области  $RD$ , при  $m \rightarrow \infty$ , то из выражений (27.39) и (27.48) следует:

$$\left. \begin{array}{l} W(t + \tau_m, \varphi, b) - W(t, \varphi, b) \rightarrow 0, \\ \text{(при } m \rightarrow \infty\text{)} \\ B(t + \tau_m, \varphi, b) - B(t, \varphi, b) \rightarrow 0 \\ \text{равномерно в области } R\Omega U_\delta. \end{array} \right\} \quad (27.53)$$

Наложим еще одно ограничительное условие на систему (27.1), а именно: будем полагать, что вещественные части всех  $(n-1)$  корней характеристического уравнения (27.33) отличны от нуля. Тем самым мы накладываем здесь требование неравенства нулю вещественных частей  $(n-1)$  характеристических показателей\*) для уравнений в вариациях (27.28).

Заметим в заключение, что, вводя новые переменные  $\varphi, b (b_1, \dots, b_{n-1})$ , согласно (27.40), мы вместо системы (27.1) получим действительно эквивалентную ей систему (27.47).

В самом деле, пусть  $\varphi$  и  $b (b_1, \dots, b_{n-1})$  удовлетворяют системе (27.47); тогда при условии (27.48) система (27.45) имеет место тождественно и, следовательно,

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} (A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*)$$

тождественно удовлетворяет системе уравнений (27.1).

Для удобства дальнейшего изучения уравнений (27.47) их целесообразно путем введения новых переменных  $g, h (h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$  преобразовать к такому виду:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{array} \right\} \quad (27.54)$$

чтобы  $P(t, g, h, \varepsilon)$  и  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  были достаточно малые при малых  $h$  и  $\varepsilon$ .

Для этого рассмотрим некоторую функцию  $f(t, x)$ , определенную для всех вещественных  $t$  и для всех  $x$  из множества  $E$ . Допустим, что  $E$  есть компактное множество некоторого метрического пространства и что в каждой точке  $E$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad (27.55)$$

равномерно по отношению к  $t$ .

Кроме того, предположим, что можно указать такие положительные постоянные  $M$  и  $\lambda$ , что для всех вещественных  $t$  и для всех  $x, x'$  и  $x''$  из  $E$  имеют место неравенства:

$$|f(t, x)| \leq M; \quad |f(t, x') - f(t, x'')| \leq \lambda \rho(x', x''), \quad (27.56)$$

где  $\rho(x', x'')$  — расстояние между точками  $x'$  и  $x''$ . Нетрудно заметить, что из принятых условий вытекает, что соотношение (27.55) выполняется равномерно не только по отношению к  $t$ , но и по отношению к  $(t, x)$ .

\*)  $n$ -й характеристический показатель в силу предположения о существовании периодического решения равен нулю.

Поэтому можно построить такую функцию  $\varepsilon(T)$ , стремящуюся к нулю при  $T \rightarrow \infty$ , что будет иметь место

$$\left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt \right| \leq \varepsilon(T), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in E. \quad (27.57)$$

Возьмем теперь произвольную величину  $\eta$  и построим функцию

$$f_\eta(t, x) = \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x) d\tau. \quad (27.58)$$

Вводя вместо  $\tau$  новую переменную  $z$  по формуле  $z = t - \tau$ , можем написать:

$$f_\eta(\tau, x) = \int_0^\infty e^{-\eta z} f(t-z, x) dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x) e^{-\eta(z-nT)} dz, \quad (27.59)$$

и поэтому на основании (27.56) получаем:

$$\begin{aligned} |f_\eta(t, x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \int_{nT}^{(n+1)T} [f(t-z, x) e^{-\eta(z-nT)} + \right. \\ &\quad \left. + f(t-z) - f(t-z, x)] dz \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x) dz - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x) (1 - e^{-\eta(z-nT)}) dz \right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x) dz \right| + M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \int_{nT}^{(n+1)T} (1 - e^{-\eta(z-nT)}) dz = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \bullet \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x) dz \right| + MT \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} + M \frac{1}{\eta} e^{-\eta T} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \left| \int_{nT}^{(n+1)T} f(t-z, x) dz \right| + MT \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \left| \int_{nT-z}^{nT+z+T} f(t, x) dt \right| + MT \end{aligned} \quad (27.60)$$

или, учитывая (27.57), окончательно находим:

$$|f_\eta(t, x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta n T} \varepsilon(T) T + MT = \frac{T \varepsilon(T)}{1 - e^{-\eta T}} + MT. \quad (27.61)$$

До сих пор величина  $T$  была произвольной. Возьмем теперь  $T$  как функцию  $\eta$ , определяемую уравнением

$$1 - e^{-\eta T} = \varepsilon(T). \quad (27.62)$$

Так как  $\varepsilon(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ , то нетрудно видеть, что для функции  $T_\eta$ , определяемой этим уравнением, должно выполняться соотношение

$$\eta T_\eta \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0.$$

Положим

$$(M+1)\eta T_\eta = \zeta(\eta).$$

Тогда из (27.61) и (27.58) убеждаемся, что для рассматриваемой функции  $f(t, x)$  имеет место неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} f(\tau, x) d\tau \right| \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in E, \quad (27.63)$$

в котором

$$\zeta(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0. \quad (27.64)$$

Итак, неравенство (27.63) получено нами для функции  $f(t, x)$ , обладающей свойствами:

- 1)  $f(t, x)$  определена для всех вещественных  $t$  и для  $x \in E$ , где  $E$  — компактное множество;
- 2) в каждой точке  $E$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

равномерно по отношению к  $t$ ;

- 3)  $|f(t, x)| \leq M$ ,  $|f(t, x') - f(t, x'')| \leq \lambda_0(x', x'')$ ;
- 4) при выполнении 3) свойство 2) имеет место равномерно относительно  $(t, x)$ .

Получим теперь неравенства типа (27.63) для функций:

$$\begin{aligned} W_1(t, \varphi, b) &= W(t, \varphi, b) - W(\varphi, b), \\ B_1(t, \varphi, b) &= B(t, \varphi, b) - B(\varphi, b), \end{aligned} \quad (27.65)$$

приняв за множество  $E$  область  $\Omega U_\delta$ .

Так как эти функции периодичны по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  то, очевидно, можем представить  $\Omega$  как окружность, и тогда  $E = \Omega U_\delta$  будет компактной областью в метрическом пространстве, являющимся топологическим произведением  $\Omega$  и  $(n-1)$ -мерного евклидова пространства.

Кроме того, в силу (27.50) в любой точке области  $\Omega U_\delta$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_1(t, \varphi, b) dt \rightarrow 0; \quad \frac{1}{T} \int_t^{t+T} B_1(t, \varphi, b) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (27.66)$$

равномерно по отношению к  $t$ .

Очевидно также, что функции  $W_1(t, \varphi, b)$ ,  $B_1(t, \varphi, b)$ , как и функции  $W(\varphi, b)$ ,  $B(\varphi, b)$ , удовлетворяют в области  $\Omega U_\sigma$ , где  $\sigma < \delta$ , неравенствам вида

$$\begin{aligned} |W_1(t, \varphi', b') - W_1(t, \varphi'', b'')| &\leq \eta(\sigma) \{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}, \\ |B_1(t, \varphi', b') - B_1(t, \varphi'', b'')| &\leq \eta(\sigma) \{|\varphi' - \varphi''| + |b' - b''|\}, \\ (|b'| &\leq \sigma, |b''| \leq \sigma), \end{aligned} \quad (27.67)$$

где

$$\eta(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0.$$

Поэтому можно построить функцию  $\zeta(\eta)$  со свойством (27.64) таким образом, чтобы для произвольного положительного  $\eta$  имели место неравенства:

$$\begin{aligned} |W_{1\eta}(t, \varphi, b)| &\leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta}; \quad |B_{1\eta}(t, \varphi, b)| \leq \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \\ -\infty < t < \infty, \quad (\varphi, b) &\in \Omega U_\delta, \end{aligned} \quad (27.68)$$

где

$$\left. \begin{aligned} W_{1\eta}(t, \varphi, b) &= \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(t, \varphi, b) d\tau, \\ B_{1\eta}(t, \varphi, b) &= \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} B_1(t, \varphi, b) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (27.69)$$

Введем теперь по аналогии с определением (26.5) функцию

$$\Delta_a(b) = \begin{cases} A_a \left\{ 1 - \frac{|b|^2}{a^2} \right\}^{2q}, & |b| \leq a, \\ 0, & |b| > a, \end{cases} \quad (27.70)$$

где  $a$  — некоторое заданное достаточно малое число;  $A_a$  определяется условием нормирования:

$$\int_{U_\delta} \Delta_a(b) db = 1, \quad (27.71)$$

где  $db = db_1 \dots db_{n-1}$ .

В (27.70)  $q > 1$  — некоторое фиксированное целое число, величина которого может быть взята сколь угодно большой.

Построим еще функцию  $\delta_a(\varphi)$  одной вещественной переменной  $\varphi$ , задав ее на интервале  $(-\pi, \pi)$  с помощью соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_a(\varphi) &= \begin{cases} \Phi_a \left\{ 1 - \frac{\varphi^2}{a^2} \right\}^{2q}, & |\varphi| \leq a, \\ 0, & |\varphi| > a, \end{cases} \\ \int_{-a}^a \delta_a(\varphi) d\varphi &= 1, \quad a < \pi, \end{aligned} \right\} \quad (27.72)$$

и распространим область ее определения на всю вещественную ось с помощью условия периодичности с периодом  $2\pi$ .

Введя эти функции, построим выражения:

$$\left. \begin{aligned} u(t, \varphi, b) &= \iint_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') W_{1\eta}(t, \varphi', b') d\varphi' db', \\ v(t, \varphi, b) &= \iint_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') B_{1\eta}(t, \varphi', b') d\varphi' db', \end{aligned} \right\} \quad (27.73)$$

обладающие по отношению к  $\varphi$  периодом  $2\pi$ , так как согласно определению  $\delta_a(\varphi)$  — периодическая функция  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ .

Заметим, что по своему построению функция

$$\delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \quad (27.74)$$

обладает частными производными по  $\varphi$  и  $b$  до  $2q$  порядка включительно. Кроме того, так как  $\Delta_a(b)$ ,  $\delta_a(\varphi)$  отличны от нуля соответственно при

$|b| \leq a$ ,  $|\varphi| \leq a$ , то функция (27.74) и все ее частные производные до  $2q$  порядка включительно ограничены и по норме не превосходят некоторой величины  $G(a)$ , вообще стремящейся к  $\infty$  при  $a \rightarrow 0$ . Отсюда на основании (27.68) можем заключить, что функции (27.73) и все их частные производные по  $\varphi$ ,  $b$  до  $2q$  порядка включительно ограничены по норме на множестве \*)  $R\Omega U_\delta$  величиной  $G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta}$ .

До сих пор  $a$  и  $\eta$  были произвольными.

Возьмем теперь в качестве  $a$  и  $\eta$  некоторые функции  $a_\varepsilon$  и  $\eta_\varepsilon$  параметра  $\varepsilon$  таким образом, чтобы

$$a_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \eta_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta_\varepsilon)}{\eta_\varepsilon} \rightarrow 0,$$

$$G(a_\varepsilon) \zeta(\eta_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (27.75)$$

Фиксируем некоторое положительное  $\rho_0 < \delta$  и возьмем  $\varepsilon^*$  столь малым, чтобы для  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$   $a = a_\varepsilon$  удовлетворило также неравенству

$$a + \rho_0 < \delta. \quad (27.76)$$

Заметим, что из неравенств

$$|b| < \rho_0, \quad |b - b'| \leq a \quad \text{и} \quad a + \rho_0 < \delta$$

следует:

$$|b'| < \delta.$$

Тогда, принимая во внимание определение (27.70) и (27.71) функции  $\Delta_a(b)$ , видим, что при  $b \in U_{\rho_0}$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ :

$$\int_{U_\delta} \Delta_a(b - b') db' = 1. \quad (27.77)$$

Теперь, принимая во внимание (27.69), запишем выражения (27.73) для  $u(t, \varphi, b)$  в следующем виде:

$$u(t, \varphi, b) = \iint_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \left[ \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \varphi', b') d\tau \right] d\varphi' db'. \quad (27.78)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \eta u &= \iint_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \varphi', b') d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \eta \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \varphi', b') d\tau \right\} d\varphi' db'. \end{aligned} \quad (27.79)$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \varphi', b') d\tau = -\eta \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} W_1(\tau, \varphi', b') d\tau + W_1(t, \varphi', b'),$$

\*) Для сокращения записи мы здесь вещественную ось  $(-\infty, \infty)$  обозначили через  $R$ , так что  $R\Omega U_\delta$  обозначает множество точек  $(t, \varphi, b)$ , для которых  $-\infty < t < \infty$ ,  $\varphi \in \Omega$ ,  $b \in U_\delta$ .

то из (27.79) следует:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u = \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') W_1(t, \varphi', b') d\varphi' db'. \quad (27.80)$$

В силу периодичности  $\delta_a(\varphi)$  и соотношения (27.77) для

$$(t, \varphi, b) \in R\Omega U_{\rho_0}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^*,$$

имеем:

$$\int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') d\varphi' db' = \int_{\Omega} \delta_a(\varphi - \varphi') d\varphi' = \int_{\Omega} \delta_a(\varphi') d\varphi' = 1. \quad (27.81)$$

Поэтому для этих же значений  $t, \varphi, b$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b) &= \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \{W_1(t, \varphi', b') - \\ &\quad - W_1(t, \varphi, b)\} d\varphi' db'. \end{aligned} \quad (27.82)$$

С другой стороны, заметим, что согласно (27.67) можно указать такое положительное  $\lambda$ , чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} |W_1(t, \varphi', b') - W_1(t, \varphi, b)| &\leq \lambda \{|\varphi' - \varphi| + |b' - b|\}. \\ (t, \varphi, b), (t, \varphi', b') &\in R\Omega U_\delta. \end{aligned} \quad (27.83)$$

Благодаря периодичности  $\delta_a(\varphi)$  по  $\varphi$  интегрирование по  $\varphi'$  можно производить по любому интервалу длины  $2\pi$  и поэтому, в частности, за интервал интегрирования можем взять интервал

$$\varphi - \pi, \varphi + \pi.$$

При таком выборе интервала  $\varphi - \varphi'$  будет изменяться от  $-\pi$  до  $\pi$  и, следовательно, в силу (27.72)  $\delta_a(\varphi - \varphi')$  будет отлична от нуля только тогда, когда

$$|\varphi - \varphi'| \leq a.$$

Поэтому, так как для  $|\varphi - \varphi'| \leq a$  ( $a < \pi$ ),  $|b - b'| \leq a$ ,  $b \in U_{\rho_0}$  ( $\rho_0 + a < \delta$ ),  $\varepsilon < \varepsilon^*$ :

$$\int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') d\varphi' db' = 1,$$

то для  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$  на  $R\Omega U_{\rho_0}$  имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b) \right| \leq 2\lambda a \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') d\varphi' db' = 2\lambda a. \quad (27.84)$$

Рассмотрим теперь частные производные

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b) \right\}; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \eta u - W_1(t, \varphi, b) \right\} \quad (27.85)$$

и заметим, что с помощью интегрирования по частям выражения (27.78) их можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \left\{ \frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial b'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial b} \right\} d\varphi' db', \\ \int_{\Omega} \int_{U_\delta} \delta_a(\varphi - \varphi') \Delta_a(b - b') \left\{ \frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial \varphi'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial \varphi} \right\} d\varphi' db'. \end{aligned} \right\} \quad (27.86)$$

В силу определения функций  $W_1(t, \varphi', b')$  и  $W_1(t, \varphi, b)$  их частные производные по  $b$ ,  $b'$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi'$  будут непрерывными функциями. Поэтому можно найти монотонную функцию  $\xi(\varepsilon)$ , стремящуюся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , такую, что

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial b'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial b} \right| &\leq \xi(\varepsilon) \{ |\varphi' - \varphi| + |b' - b| \}, \\ \left| \frac{\partial W_1(t, \varphi', b')}{\partial \varphi'} - \frac{\partial W_1(t, \varphi, b)}{\partial \varphi} \right| &\leq \xi(\varepsilon) \{ |\varphi' - \varphi| + |b' - b| \}. \end{aligned} \right\} \quad (27.87)$$

Рассуждая, как и выше, т. е. принимая за интервал интегрирования  $\varphi - \pi$ ,  $\varphi + \pi$ , на котором  $\delta_a(\varphi - \varphi')$  будет отличной от нуля, а также принимая во внимание (27.82), имеющее место при  $|b' - b| \leq a$ , убеждаемся, что производные (27.85) на множестве  $R\Omega U_{\rho_0}$  по норме будут меньше, чем  $2\xi a$  для  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ . Но так как в силу (27.75)  $a \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то очевидно, что функция (27.82) и ее частные производные по  $b$  и  $\varphi$  на множестве  $R\Omega U_{\rho_0}$  по норме будут меньше некоторой величины  $\mu(\varepsilon)$ , стремящейся к нулю вместе с  $\varepsilon$ .

Но так как в силу (27.75)  $a \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то очевидно, что функция (27.82) и ее частные производные по  $b$  и  $\varphi$  на множестве  $R\Omega U_{\rho_0}$  по норме будут меньше некоторой величины  $\mu(\varepsilon)$ , стремящейся к нулю вместе с  $\varepsilon$ .

Аналогичным образом убеждаемся, что теми же свойствами будет обладать функция

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \eta v - B_1(t, \varphi, b).$$

Кроме того, функции  $\eta u$ ,  $\eta v$  и их частные производные по  $\varphi$ ,  $b$  ограничены по норме на множестве  $R\Omega U_{\rho_0}$  величиной  $G(a)\zeta(\eta)$ , стремящейся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Итак, функции

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - W_1(t, \varphi, b) &= \frac{\partial u}{\partial t} - W(t, \varphi, b) + W(\varphi, b), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - B_1(t, \varphi, b) &= \frac{\partial v}{\partial t} - B(t, \varphi, b) + B(\varphi, b) \end{aligned} \right\} \quad (27.88)$$

и их частные производные первого порядка по  $\varphi$  и  $b$  ограничены по норме на множестве  $R\Omega U_{\rho_0}$  величиной  $\alpha(\varepsilon)$ , стремящейся к нулю вместе с  $\varepsilon$ .

Заметив это, возвратимся к уравнениям (27.47) и совершим замену переменных, полагая

$$\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h); \quad b = h + \varepsilon v(t, g, h). \quad (27.89)$$

Дифференцируя (27.89) и подставляя в (27.47), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \omega + \varepsilon W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v), \\ \frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon Hh + \varepsilon Hv + \varepsilon B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v), \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - W(t, g, h) + W(g, h) \right\} + \\ &+ \varepsilon \{W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h)\} + \varepsilon W(g, h) + \varepsilon \omega, \\ \frac{dh}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \frac{dh}{dt} &= -\varepsilon \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} - B(t, g, h) + B(g, h) \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 Hv + \varepsilon \{B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h)\} + \varepsilon B(g, h) + \varepsilon Hh. \end{aligned} \right\} \quad (27.90)$$

Возьмем теперь столь малое  $\varepsilon_1 < \varepsilon^*$ , чтобы для всякого положительного  $\varepsilon$ , не превосходящего  $\varepsilon_1$ , было справедливо неравенство

$$\varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta} < \delta - \rho_1, \quad 0 < \rho_1 < \delta. \quad (27.91)$$

Тогда ввиду того, что функции (27.73) ограничены функцией  $G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta}$ , следует:

$$|\varepsilon v| \leq \varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad (27.92)$$

и при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ,  $(t, g, h) \in R\Omega U_{\rho_1}$  будем иметь:

$$|h + \varepsilon v| \leq \varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta} + \rho_1 < \delta. \quad (27.93)$$

Но, как указывалось выше, функции

$$W(t, \varphi, b) - W(\varphi, b), \quad B(t, \varphi, b) - B(\varphi, b)$$

для значений  $b \in U_\delta$  являются ограниченными на множестве  $R\Omega U_\delta$  вместе со своими частными производными функциями, стремящимися к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Поэтому, ввиду того, что  $h + \varepsilon v \in U_\delta$ , убеждаемся, что функции

$$\left. \begin{aligned} W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h), \\ B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h) \end{aligned} \right\} \quad (27.94)$$

и их частные производные первого порядка по  $g, h$  ограничены по норме на множестве  $R\Omega U_{\rho_1}$  некоторой функцией, стремящейся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ввиду того, что функции (27.88) также обладают этими свойствами, выражения

$$\begin{aligned} L_1(t, g, h, \varepsilon) &= W(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - W(t, g, h) - \frac{\partial u}{\partial t} + W(t, g, h) - W(g, h), \\ L_2(t, g, h, \varepsilon) &= B(t, g + \varepsilon u, h + \varepsilon v) - B(t, g, h) - \frac{\partial v}{\partial t} + B(t, g, h) - B(g, h) + \varepsilon Hv \end{aligned}$$

и их частные производные первого порядка по  $g, h$  ограничены на множестве  $R\Omega U_{\rho_1}$  некоторой функцией от  $\varepsilon$ , стремящейся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Заметив это, представим уравнения (27.90) в форме, разрешенной относительно  $\frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$ .

Для этого рассмотрим матрицу, обратную матрице  $n$ -го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1_1 + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial g} & \varepsilon \frac{\partial u}{\partial h} \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial g} & 1_{n-1} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial h} \end{vmatrix}, \quad (27.95)$$

где  $1_{n-1}$  представляет квадратную единичную матрицу  $(n-1)$ -го порядка.

Как указывалось, функции (27.73) и все их частные производные по  $\varphi, b$  до  $2q$  порядка включительно ограничены по норме на множестве  $R\Omega U_\delta$  величиной  $G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta}$ .

Очевидно, что для значений  $(t, g, h) \in R\Omega U_{\rho_1}$ , где  $\rho_1 < \delta$ , функции  $u(t, g, h), v(t, g, h)$  также будут ограничены по норме на множестве  $R\Omega U_{\rho_1}$  вместе со своими частными производными первого порядка по  $g$  и  $h$  функцией  $\alpha(s)$ , стремящейся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Поэтому можно указать такое положительное  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ , чтобы для любого положительного  $\varepsilon < \varepsilon_0$  матрица, обратная матрице (27.95), существовала везде на  $R\Omega U_{\rho_1}$  и могла быть представлена в виде:

$$\begin{vmatrix} 1_1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1_{n-1} + a_{22} \end{vmatrix}, \quad (27.96)$$

где

$$\dot{a}_{11}(t, g, h, \varepsilon), a_{12}(t, g, h, \varepsilon), a_{21}(t, g, h, \varepsilon), a_{22}(t, g, h, \varepsilon)$$

и их частные производные первого порядка по  $g, h$  стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно на  $R\Omega U_{\rho_1}$ .

Решая систему (27.90) относительно  $\frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$ , получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dg}{dt} = \varepsilon \omega + \varepsilon \Pi(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} = \varepsilon Hh + \varepsilon \Gamma(t, g, h, \varepsilon), \end{array} \right\} \quad (27.97)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(t, g, h, \varepsilon) = & W(g, h) + a_{11}(t, g, h, \varepsilon) \{ \omega + W(g, h) + L_1(t, g, h, \varepsilon) \} + \\ & + a_{21}(t, g, h, \varepsilon) \{ Hh + B(g, h) + L_2(t, g, h, \varepsilon) \} + L_1(t, g, h, \varepsilon); \\ \Gamma(t, g, h, \varepsilon) = & B(g, h) + a_{12}(t, g, h, \varepsilon) \{ \omega + W(g, h) + \\ & + L_1(t, g, h, \varepsilon) \} + a_{22}(t, g, h, \varepsilon) \{ Hh + B(g, h) + \\ & + L_2(t, g, h, \varepsilon) \} + L_2(t, g, h, \varepsilon). \end{aligned} \quad (27.98)$$

Сделаем ряд замечаний о свойствах введенных функций  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$  и  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ , которые будут нам необходимы для дальнейших рассуждений.

Как видно из (27.98), функции  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$  и  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$  определены для каждого положительного  $\varepsilon < \varepsilon_0$  на множестве  $R\Omega U_{\rho_1}$ , причем на этом множестве функции

$$\Pi(t, g, h, \varepsilon) - W(g, h), \Gamma(t, g, h, \varepsilon) - B(g, h)$$

и их частные производные по  $g, h$  стремятся к нулю равномерно при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Принимая во внимание (27.51), заключаем, что можно указать такие функции  $M(\varepsilon)$ ;  $\lambda(\varepsilon, \sigma)$ , удовлетворяющие условиям:  $M(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;  $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ , что имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} |\Pi(t, g, 0, \varepsilon)| &\leq M(\varepsilon); |\Gamma(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon), \\ \varepsilon &< \varepsilon_0, t \in R, g \in \Omega. \end{aligned} \quad (27.99)$$

$$\left. \begin{aligned} |\Pi(t, g', h', \varepsilon) - \Pi(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{ |g' - g''| + |h' - h''| \}, \\ |\Gamma(t, g', h', \varepsilon) - \Gamma(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{ |g' - g''| + |h' - h''| \}, \end{aligned} \right\} \quad (27.100)$$

$$(t, g', h'), (t, g'', h'') \in R\Omega U_\delta, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

в которых  $\sigma$  — произвольное положительное число меньшее  $\rho_1$ .

Функции  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$  обладают периодом  $2\pi$  по отношению к  $g$ , так как этим свойством обладают функции, входящие в выражения для  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$ . Так как функции  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$  (см. (27.98)) выражаются через функции, которые в свою очередь выражаются через  $W(t, \varphi, b)$ ,  $B(t, \varphi, b)$ , то ясно, что если  $\{\tau_m\}$  есть такая последовательность из  $R$ , для которой равномерно на  $R\Omega U_\delta$  имеют место соотношения (27.53), то для этой последовательности равномерно на  $R\Omega U_{\rho_1}$  будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - \Pi(t, g, h, \varepsilon) &\rightarrow 0, \\ \Gamma(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - \Gamma(t, g, h, \varepsilon) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (27.101)$$

при  $m \rightarrow \infty$  и при каждом  $\varepsilon$  таком, что  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

Если условие а) (см. стр. 336) об ограниченности и равномерной непрерывности частных производных функции  $X(t, x)$  по  $x$  усилить требованием ограниченности частных производных до  $m$ -го порядка включительно, то построенные функции  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$  также будут обладать ограниченными и равномерно-непрерывными частными производными до  $m$ -го порядка включительно, что следует из рассмотрения формул (27.66), (27.69), (27.73) и (27.89).

Возвращаясь к уравнениям (27.97), совершим в них переход к «медленному времени», положив

$$\tau = \varepsilon t.$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= \omega + \Pi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right). \end{aligned} \right\} \quad (27.102)$$

Выделим теперь один частный случай, который подробно будет нами рассмотрен в § 30, когда функции  $W(t, \varphi, b)$ ,  $B(t, \varphi, b)$ , входящие в уравнения (27.47), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= \bar{W}(t, \varphi + vt, b), \\ B(t, \varphi, b) &= \bar{B}(t, \varphi + vt, b), \end{aligned} \right\} \quad (27.103)$$

где  $\bar{W}(t, \varphi, b)$ ,  $\bar{B}(t, \varphi, b)$  — периодичны по  $t$  с некоторым постоянным периодом  $T$ .

Тогда в силу формул (27.66), (27.69), (27.73) и (27.89) видим, что также

$$\begin{aligned}\Pi(t, g, h, \varepsilon) &= \bar{\Pi}(t, g + vt, h, \varepsilon), \\ \Gamma(t, g, h, \varepsilon) &= \bar{\Gamma}(t, g + vt, h, \varepsilon),\end{aligned}$$

причем  $\bar{\Pi}(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $\bar{\Gamma}(t, g, h, \varepsilon)$  будут обладать по отношению к  $t$  тем же периодом  $T$ .

В рассматриваемом частном случае (27.103), переходя к новой угловой переменной  $\vartheta$  согласно формуле

$$g + vt = g + \frac{v\tau}{\varepsilon} = \vartheta,$$

вместо системы (27.102) получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega + \frac{v}{\varepsilon} + \bar{\Pi}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \bar{\Gamma}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right),\end{aligned}\right\} \quad (27.104)$$

правые части которых обладают периодом  $\varepsilon T$  по отношению к  $\tau$ .

Как видно, уравнения (27.102), в частном случае (27.103), и уравнения (27.104), к которым приводятся основные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b), \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, \varphi, b),\end{aligned}$$

заменой переменных

$$\begin{aligned}\varphi &= g + \varepsilon u(t, g, h, \varepsilon), \quad b = h + \varepsilon v(t, g, h, \varepsilon), \\ \varepsilon t &= \tau, \quad g + vt = \vartheta\end{aligned}$$

могут быть сведены к следующему типу уравнений:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon),\end{aligned}\right\} \quad (27.105)$$

при этом в силу указанных свойств функций  $\Pi(t, g, h, \varepsilon)$  и  $\Gamma(t, g, h, \varepsilon)$  можно указать такие положительные числа  $\varepsilon_0, \rho_1$  ( $\rho_1 < \delta$ ), что будут выполнены условия:

- функция  $G(\varepsilon)$  определена для  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ;
- функции  $P(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  определены в области

$$t \in R, g \in \Omega, h \in U_{\rho_1}, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

и обладают периодом  $2\pi$  по отношению к угловой переменной  $g$  (напомним, что в частном случае (27.103) в уравнении (27.104)  $\bar{\Pi}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right)$ ,  $\bar{\Gamma}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right)$  обладают периодом  $\varepsilon T$  по отношению к  $\tau$ );

в)  $G(\varepsilon)$  и  $P(t, g, h, \varepsilon)$  могут принимать лишь вещественные значения;  
г) для  $t \in R, g \in \Omega, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  имеют место неравенства:

$$|P(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon); |Q(t, g, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon), \quad (27.106)$$

где  $M(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

д) для любого положительного  $\sigma < \rho_1$  в области

$$t \in R, g' \in \Omega, g'' \in \Omega, h' \in U_\sigma, h'' \in U_\sigma, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} |P(t, g', h', \varepsilon) - P(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{ |g' - g''| + |h' - h''| \}, \\ |Q(t, g', h', \varepsilon) - Q(t, g'', h'', \varepsilon)| &\leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{ |g' - g''| + |h' - h''| \}, \end{aligned} \quad (27.107)$$

в которых  $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ ;

е) все вещественные части корней  $p_1, \dots, p_{n-1}$  уравнения

$$\text{Det } |pI_{n-1} - H| = 0 \quad (27.108)$$

отличны от нуля.

Отметим, что в статическом случае, когда отсутствует зависимость от угловой переменной  $\varphi$ , основные уравнения (27.1) в результате аналогичных преобразований будут приведены к системе:

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \quad (27.109)$$

при этом можно указать такие  $\varepsilon_0$  и  $\rho_1$ , что будут выполняться условия:

а) функции  $Q(t, h, \varepsilon)$  определены в области

$$t \in R, h \in U_{\rho_1}, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0;$$

б) для  $t \in R, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , имеет место неравенство

$$|Q(t, 0, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon), \quad (27.110)$$

где  $M(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

в) для любого положительного  $\sigma < \rho_1$  в области

$$t \in R, h' \in U_\sigma, h'' \in U_\sigma, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

имеет место неравенство

$$|Q(t, h', \varepsilon) - Q(t, h'', \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \sigma) \{ |h' - h''| \}, \quad (27.111)$$

в котором  $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ ;

г) все вещественные части корней характеристического уравнения

$$\text{Det } |pI_{n-1} - X'_0(\xi^0)| = 0 \quad (27.112)$$

отличны от нуля.

Введем сейчас некоторые определения, относящиеся к теории почти периодических функций.

Рассмотрим какую-либо функцию  $f(t, x)$ , заданную на  $RE$ , где  $E$  обозначает некоторое множество значений  $x$ .

Мы будем говорить, что  $f(t, x)$  является почти периодической функцией  $t$  равномерно по отношению к  $x$ , если любому  $\eta > 0$  можно сопоставить положительное  $l(\eta)$  таким образом, что в любом интервале на  $R$

длины  $l(\eta)$  лежит, по крайней мере, одно  $\tau$  (почти период для  $\eta$ ), для которого везде на  $RE$  справедливо неравенство

$$|f(t + \tau, x) - f(t, x)| \leq \eta.$$

Для этих почти периодических функций существует счетное множество частот  $\{\lambda_j\}$ , не зависящих от  $x$ , такое, что для всякого  $\lambda$ , не принадлежащего к нему, выполняется соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) e^{-i\lambda t} dt = 0.$$

Пусть  $\{\omega_\alpha\}$  представляет счетное множество вещественных чисел, обладающее свойствами:

1) между  $\omega_\alpha$  не существует нетривиальных линейных соотношений

$$\sum n_\alpha \omega_\alpha = 0$$

с целочисленными коэффициентами;

2) всякое  $\lambda_j$  может быть представлено линейной комбинацией  $\omega_\alpha$  с целочисленными коэффициентами.

Такое множество  $\{\omega_\alpha\}$  условимся называть частотным базисом данной почти периодической функции. В частности, для периодической функции частотный базис состоит из одного элемента; для квазипериодических функций частотный базис состоит из конечного числа элементов.

Как известно, частотный базис обладает следующим важным свойством: если  $\tau_m$  есть такая последовательность, что для любого  $\omega_\alpha$

$$e^{i\omega_\alpha \tau_m} \rightarrow 1 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (27.113)$$

то равномерно на  $RE$  имеем:

$$f(t + \tau_m, x) - f(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (27.114)$$

Это свойство может также служить и определением рассматриваемых почти периодических функций.

Именно, если  $\{\omega_\alpha\}$  представляет счетное множество линейно независимых вещественных чисел и если для каждой последовательности  $\tau_m$ , для которой справедливо (27.113), будет справедливо также и (27.114) равномерно на  $RE$ , то тогда  $f(t, x)$  будет почти периодической функцией равномерно по отношению к  $x$ , а  $\{\omega_\alpha\}$  будет ее частотным базисом.

Условимся называть представление  $s$ -мерного интегрального многообразия  $S_t$

$$x = f(t, C_1, C_2, \dots, C_s)$$

периодическим с периодом  $T$ , если тождественно

$$f(t + T, C_1, C_2, \dots, C_s) = f(t, C_1, C_2, \dots, C_s)$$

для всех  $t, C_1, C_2, \dots, C_s$ , принадлежащих области их изменения.

Заметим также, что для почти периодической функции  $f(t, x)$  всегда существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t, x) dt,$$

причем сходимость к пределу будет равномерной по отношению к  $t, x$ .

Таким образом, условие б), наложенное нами на правую часть уравнения (27.1)  $X(t, x)$  (см. стр. 336) будет всегда выполняться, если функция  $X(t, x)$  является почти периодической по  $t$  равномерно по отношению к  $x \in D_\rho$ .

### § 28. Некоторые свойства решений преобразованных уравнений в окрестности точек равновесия и замкнутых орбит

В настоящем параграфе рассмотрим некоторые свойства решений систем уравнений вида (27.105), к которым, как это показано в предыдущем параграфе, сводятся уравнения (27.1).

После того как нами будут подробно изучены уравнения (27.105), мы сможем перейти к формулировке и доказательству теорем применительно к уравнениям (27.1).

Итак, сформулируем и докажем вначале ряд лемм о свойствах решений системы уравнений (27.105), причем везде в дальнейшем будем полагать, что функции  $P(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $Q(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $G(\varepsilon)$  удовлетворяют условиям, указанным в предыдущем параграфе (см. стр. 352), причем  $P(t, g, h, \varepsilon)$ , и  $G(\varepsilon)$  всегда вещественны при любых комплексных  $h$ , лежащих в рассматриваемой области.

**Лемма 1.** Можно указать такое положительное  $\bar{\varepsilon}$  ( $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_0$ ), что для каждого положительного  $\varepsilon$ , меньшего  $\bar{\varepsilon}$ , система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

имеет интегральное многообразие, представимое соотношением вида

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

в котором  $f(t, g, \varepsilon)$  как функция  $t, g$  определена на  $R\Omega$  и удовлетворяет неравенствам:

$$|f(t, g, \varepsilon)| \leq D(\varepsilon) < \rho, \quad (28.2)$$

$$|f(t, g', \varepsilon) - f(t, g'', \varepsilon)| \leq \Delta(\varepsilon) |g' - g''|, \quad (28.3)$$

причем

$$D(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Функция  $f(t, g, \varepsilon)$  обладает по отношению к угловой переменной  $g$  периодом  $2\pi$ .

Если функции  $P(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  в области  $t \in R$ ,  $g \in \Omega$ ,  $h \in U_\rho$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , имеют ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по  $g$ ,  $h$  до  $m$ -го порядка включительно, то  $f(t, g, \varepsilon)$  также

будет иметь ограниченные и равномерно непрерывные производные по  $g$  также до  $m$ -го порядка включительно.

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу  $H$  и представим ее в виде

$$H = U \begin{vmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{vmatrix} U^{-1}, \quad (28.4)$$

где  $U$  — произвольная матрица, имеющая обратную  $U^{-1}$ ;  $H_+$ ,  $H_-$  — матрицы, для которых корнями характеристических уравнений являются корни уравнения, приведенного в условии д), соответственно с положительными вещественными частями для  $H_+$  и отрицательными вещественными частями для  $H_-$ . Таким образом, если уравнение (27.108) имеет  $s$  корней с отрицательными вещественными частями и  $n-s-1$  корней с положительными вещественными частями, то матрица  $H_-$  будет  $s$ -го порядка, а матрица  $H_+$  —  $(n-s-1)$ -го порядка.

Определим теперь матрицу  $J(t)$  при помощи следующих соотношений:

$$\left. \begin{array}{l} J(t) = -U \begin{vmatrix} e^{-H_+ t} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} U^{-1} \text{ для } t > 0, \\ J(t) = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_- t} \end{vmatrix} U^{-1} \text{ для } t < 0. \end{array} \right\} \quad (28.5)$$

Определенная таким образом матрица  $J(t)$  будет удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \quad \text{для } t \neq 0 \quad (28.6)$$

и условию разрыва при  $t = 0$

$$J(-0) - J(+0) = E. \quad (28.7)$$

Так как общее решение уравнения (28.6) имеет вид

$$J(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j J_j(t),$$

где  $J_j(t) = e^{z_j t}$  — для простого корня уравнения (27.108),  $J_j(t) = F_j(t) e^{z_j t}$  — для кратного корня  $z = z_j$ , ( $F_j(t)$  — некоторый полином, степень которого не превосходит порядка кратности  $z_j$ ), то, следовательно, в общем случае имеем:

$$J(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t) e^{z_j t} = e^{-Ht}. \quad (28.8)$$

Отсюда видим, что элементами матриц  $e^{-H_+ t}$ ,  $e^{-H_- t}$  соответственно будут:

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t) e^{(\alpha_j + i\gamma_j)t}, \quad \text{где } \alpha_j < 0, \quad (28.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} C_j F_j(t) e^{(\alpha_j + i\gamma_j)t}, \quad \text{где } \alpha_j > 0. \quad (28.10)$$

Ввиду того, что экспонента растет быстрее, чем полином, можно всегда найти такие положительные постоянные  $\alpha$  и  $K$ , для которых

будет справедливо неравенство

$$|J(t)| \leq K e^{-\alpha |t|} \quad (28.11)$$

на всей вещественной оси.

Заметив это, фиксируем положительные числа  $D, \Delta (D < \rho)$  и рассмотрим класс  $C(D, \Delta)$  функций  $F(t, g)$  со значениями из  $E_{n-1}$ , где  $E_{n-1}$  —  $(n-1)$ -мерное евклидово пространство, определенных на  $R^{\Omega}$ , удовлетворяющих неравенствам:

$$|F(t, g)| \leq D, \quad |F(t, g') - F(t, g'')| \leq \Delta |g' - g''| \quad (28.12)$$

и обладающих периодом  $2\pi$  по отношению к угловой переменной  $g$ .

Рассмотрим для некоторой функции  $F(t, g)$  из класса  $C(D, \Delta)$  уравнение вида

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon). \quad (28.13)$$

Так как функция  $P(t, g, h, \varepsilon)$  обладает свойством г) (см. стр. 353) (где вместо  $\sigma$ , характеризующего область определения  $h$ , в данном случае будет стоять  $D$ , характеризующее область определения функций  $F(t, g)$ ), то всюду на  $R^{\Omega}$  имеем:

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g', 0, \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, D) |F(t, g')|,$$

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, D) \{ |g' - g''| + |F(t, g') - F(t, g'')| \}$$

или учитывая, что функция  $P(t, g, h, \varepsilon)$  при  $h=0$  является величиной порядка  $\varepsilon$  и что функции  $F(t, g)$  удовлетворяют условиям (28.12), окончательно получаем:

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon)| \leq M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D, \quad (28.14)$$

$$|P(t, g', F(t, g'), \varepsilon) - P(t, g'', F(t, g''), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |g' - g''|. \quad (28.15)$$

Поэтому, задаваясь произвольными начальными условиями:

$$g = g^0 \quad \text{при } t = t_0,$$

в силу теоремы Коши мы можем построить решение уравнения (28.13) для любого  $t$ , причем оно будет единственным.

Обозначим его символически в виде

$$g_t = T_{z, t_0}^F(g^0), \quad \text{где } z = t - t_0. \quad (28.16)$$

Вообще говоря,  $g_t$  зависит от  $\varepsilon$  как от параметра; однако, так как в течение всего доказательства  $\varepsilon$  рассматривается как фиксированное, достаточно малое число, то, чтобы излишне не усложнять записи формул, зависимость от  $\varepsilon$  здесь не указывается. Аналогично будем поступать и в дальнейшем без специальных оговорок.

Заметим, что так как решению

$$g(t) = T_{z, t_0}^F(g^0)$$

соответствует начальное значение  $g^0$ , а решению

$$g(t) + 2\pi = T_{z, t_0}^F(g^0 + 2\pi)$$

(которое в силу периодичности правой части уравнения (28.13) по отношению к угловой переменной  $g$  с периодом  $2\pi$  также является решением уравнения (28.13)) соответствует начальное значение  $g^0 + 2\pi$ , то, сравнивая эти равенства, получаем:

$$T_{z, t_0}^F(g^0 + 2\pi) = T_{z, t_0}^F(g^0) + 2\pi,$$

т. е. при замене в  $T_{z, t_0}^F(g^0)$   $g^0$  на  $g^0 + 2\pi$  выражение  $T_{z, t_0}^F(g^0)$  получит приращение  $2\pi$ .

Рассмотрим теперь некоторые функции  $F$  и  $\bar{F}$  из класса  $C(D, \Delta)$ . Положим:

$$g_t = T_{z, t_0}^F(g^0), \quad \bar{g}_t = T_{z, t_0}^{\bar{F}}(\bar{g}), \quad z = t - t_0, \quad (28.17)$$

где

$$g^0 = g_t(t_0), \quad \bar{g} = \bar{g}_t(t_0).$$

Тогда на основании (28.13) будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d(\bar{g}_t - g_t)}{dt} \right| &= |P(t, \bar{g}_t, \bar{F}(t, \bar{g}_t), \varepsilon) - P(t, g_t, F(t, g_t), \varepsilon)| = \\ &= |P(t, \bar{g}_t, \bar{F}(t, \bar{g}_t), \varepsilon) - P(t, \bar{g}_t, F(t, \bar{g}_t), \varepsilon) + P(t, \bar{g}_t, F(t, \bar{g}_t), \varepsilon) - \\ &- P(t, g_t, F(t, g_t), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, D) \| \bar{F}(t, \bar{g}_t) - F(t, \bar{g}_t) \| + \lambda(\varepsilon, D) \{ |\bar{g}_t - g_t| + \\ &+ |F(t, \bar{g}_t) - F(t, g_t)| \} \end{aligned}$$

или, учитывая (28.12), окончательно получаем:

$$\left| \frac{d(\bar{g}_t - g_t)}{dt} \right| \leq \lambda(\varepsilon, D) \| \bar{F}(t, \bar{g}_t) - F(t, \bar{g}_t) \| \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) |\bar{g}_t - g_t|, \quad (28.18)$$

где обозначено:

$$\|f\| = \sup_{t, g} |f(t, g)|.$$

Нетрудно показать, что имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |T_{z, t_0}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z, t_0}^F(g^0)| &= |\bar{g}_t - g_t| \leq |\bar{g} - g^0| \exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} + \\ &+ \frac{\|\bar{F}(t, \bar{g}_t) - F(t, \bar{g}_t)\|}{1 + \Delta} \{ \exp[\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|] - 1 \}, \quad (28.19) \end{aligned}$$

где  $\bar{g}$  и  $g^0$  — начальные значения  $\bar{g}_t$  и  $g_t$ .

Действительно, рассматривая наряду с неравенством (28.18) уравнение

$$\frac{du}{dt} = \lambda(\varepsilon, D) \| \bar{F} - F \| + \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) u \quad (28.20)$$

с начальным условием

$$u|_{t=t_0} = u_0 = |\bar{g}_t - g_t|_{t=t_0},$$

решением которого будет

$$u = u_0 \exp \{ \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |z| \} + \frac{\|\bar{F} - F\|}{1 + \Delta} \{ \exp [\lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta)] |z| - 1 \}, \quad (28.21)$$

убеждаемся в справедливости неравенства:

$$\begin{aligned} |\bar{g}_t - g_t| &\leq u \leq |\bar{g} - g^0| \exp \{ \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |z| \} + \\ &+ \frac{\|\bar{F} - F\|}{1 + \Delta} \{ \exp [\lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta)] |z| - 1 \}. \end{aligned}$$

После сделанных предварительных замечаний рассмотрим преобразование  $S$ , преобразующее функцию  $F$  из класса  $C(D, \Delta)$  в функцию

$$S_{t, g}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q\{t + z; T_{z, t}^F(g); F[t + z; T_{z, t}^F(g)]; \varepsilon\} dz. \quad (28.22)$$

В силу вышеуказанного свойства периодичности «второго рода» функции  $T_{z, t_0}^F(g)$  по отношению к  $g$ :

$$T_{z, t_0}^F(g + 2\pi) = T_{z, t_0}^F(g) + 2\pi,$$

а также в силу периодичности функций  $F(t, g)$  и  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  по отношению к угловой переменной  $g$  с периодом  $2\pi$ , можем заключить, что  $S_{t, g}(F)$  также обладает периодом  $2\pi$  по отношению к угловой переменной  $g$ .

Составим теперь оценки для функций:

$$|S_{t, g}(F)|; |S_{t, \bar{g}}(\bar{F}) - S_{t, g^0}(F)|. \quad (28.23)$$

Используя условия (28.12), которым удовлетворяет функция  $F(t, g)$ , а также свойства в) и г) функции  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  (см. стр. 353), имеем:

$$\begin{aligned} |Q\{t + z; T_{z, t}^F(g); F[t + z; T_{z, t}^F(g)]; \varepsilon\}| &\leq |Q\{t + z; T_{z, t}^F(g); 0; \varepsilon\}| + \\ &+ |Q\{t + z; T_{z, t}^F(g); F[t + z; T_{z, t}^F(g)]; \varepsilon\} - Q\{t + z; T_{z, t}^F(g); 0; \varepsilon\}| \leq \\ &\leq |Q\{t + z; T_{z, t}^F(g); 0; \varepsilon\}| + \lambda(\varepsilon, D) |F[t + z; T_{z, t}^F(g)]| \leq M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D. \end{aligned} \quad (28.24)$$

Мажорируя (28.22), с учетом (28.11) и (28.24), получаем:

$$\begin{aligned} |S_{t, g}(F)| &\leq \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D\} K \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-\alpha|z|\} dz = \\ &= \frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D\}. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Согласно (28.22), учитывая при этом неравенство (28.11) и свойство г) (см. стр. 353), находим:

$$\begin{aligned}
 |S_{t, \bar{g}}(\bar{F}) - S_{t, g^0}(F)| &\leqslant \\
 &\leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} |Q\{t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g}); \bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})]; \varepsilon\} - \\
 &\quad - Q\{t+z; T_{z, t}^F(g^0); F[t+z; T_{z, t}^F(g^0)]; \varepsilon\}| dz \leqslant \\
 &\leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} \lambda(\varepsilon, D) \{|T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z, t}^F(g)| + |\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - \\
 &\quad - F[t+z; T_{z, t}^F(g^0)]|\} dz. \quad (28.26)
 \end{aligned}$$

Согласно (28.12) имеем:

$$\begin{aligned}
 |\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t+z; T_{z, t}^F(g^0)]| &= |\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - \\
 &\quad - F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] + F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t+z; T_{z, t}^F(g^0)]| \leqslant \\
 &\leqslant |\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})]| + \Delta |T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z, t}^F(g^0)|,
 \end{aligned}$$

в результате чего неравенство (28.26) представим в виде:

$$\begin{aligned}
 |S_{t, \bar{g}}(\bar{F}) - S_{t, g^0}(F)| &\leqslant \\
 &\leqslant K \lambda(\varepsilon, D) \|\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\| \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz + K \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} |T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g}) - T_{z, t}^F(g^0)| dz,
 \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (28.19), вместо полученного неравенства можем написать следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 |S_{t, \bar{g}}(\bar{F}) - S_{t, g^0}(F)| &\leqslant K \lambda(\varepsilon, D) \|\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - \\
 &- F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz + K \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} + \\
 &+ \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |z| |\bar{g} - g^0| dz + \\
 &+ K \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) \frac{\|\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\|}{1 + \Delta} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |z|\} dz - \\
 &- K \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) \frac{\|\bar{F}[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})] - F[t+z; T_{z, t}^{\bar{F}}(\bar{g})]\|}{1 + \Delta} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z|\} dz = K \lambda(\varepsilon, D) \{|\bar{g} - g^0| (1 + \Delta) + \\
 &+ \|\bar{F} - F\| \} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |z|\} dz. \quad (28.27)
 \end{aligned}$$

До сих пор величины  $D$  и  $\Delta$  были произвольными; подберем теперь их как функции параметра  $\varepsilon$ :  $D = D(\varepsilon)$ ,  $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ , таким образом, чтобы

$$D(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \Delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и чтобы для всех  $\varepsilon$ , меньших некоторого  $\bar{\varepsilon}$ , выполнялись неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} &< D; & \frac{4K}{\alpha} \lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) &< \Delta; \\ (1 + \Delta)\lambda(\varepsilon, D) &< \frac{\alpha}{2}; & \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} K &< 1. \end{aligned} \right\} \quad (28.28)$$

Такой подбор  $D = D(\varepsilon)$ ,  $\Delta = \Delta(\varepsilon)$  всегда возможен, поскольку  $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ ,  $\lambda(\varepsilon, D) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $D \rightarrow 0$ .

В силу того, что

$$(1 + \Delta)\lambda(\varepsilon, D) < \frac{\alpha}{2},$$

очевидно, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(1 + \Delta)|z|\} dz < \frac{4}{\alpha}. \quad (28.29)$$

Таким образом, учитывая (28.29), а также неравенства (28.28), вместо (28.25) и (28.27) окончательно получаем:

$$|S_{t,g}(F)| \leq D(\varepsilon), \quad (28.30)$$

$$|S_{t,\bar{g}}(\bar{F}) - S_{t,g_0}(F)| \leq \Delta(\varepsilon) |\bar{g} - g^0| + \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|, \quad (28.31)$$

откуда, в частности, следует:

$$|S_{t,\bar{g}}(F) - S_{t,g^0}(F)| \leq \Delta(\varepsilon) |\bar{g} - g^0|. \quad (28.32)$$

В силу определения класса  $C(D, \Delta)$  функции, принадлежащие этому классу, характеризуются тем, что для них выполняются условия (28.12).

Для функций  $S_{t,g}(F)$  выполняются условия (28.30), (28.31), аналогичные условиям (28.12).

Это означает, что функция  $S_{t,g}(F)$  принадлежит к тому же классу  $C(D, \Delta)$ , к которому принадлежит функция  $F$ , т. е. преобразование  $S$  при  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  (для  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  путем соответствующего выбора  $D$  и  $\Delta$  мы получили неравенства (28.30) и (28.31)) переводит функции, принадлежащие классу  $C(D, \Delta)$ , в функции того же класса.

При  $\bar{g} = g^0$  из (28.31) получаем неравенство:

$$|S\bar{F} - SF| \leq \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|, \quad \text{где } \|f\| = \sup |f|, \quad (28.33)$$

на основании которого с помощью теоремы Каччиополи — Банаха легко доказать существование и единственность решения уравнения

$$F = SF \quad (28.34)$$

в классе функций  $C(D, \Delta)$ .

Теорема Каччиополи — Банаха \*) формулируется следующим образом.

Пусть имеется непустое множество  $\{\varphi\}$  функций, определенных на одном и том же множестве  $\mathfrak{M}$  и обладающих свойствами:

1. Каждая функция  $\varphi$  ограничена (быть может, своей константой):

$$|\varphi| \leq D_\varphi.$$

2. Предел равномерно сходящейся последовательности функций семейства также есть функция этого семейства.

3. На данном семействе определен оператор, который каждую функцию этого семейства переводит в функцию того же семейства.

4. Для любой пары функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  семейства имеет место неравенство

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leq m \sup |\varphi_2 - \varphi_1|, \quad \text{где } 0 \leq m \leq 1.$$

Тогда уравнение  $\varphi = A(\varphi)$  имеет единственное решение.

Проверим выполнение условий теоремы для нашего класса функций  $F$ .

Функции  $F$  определены на классе  $C(D, \Delta)$  и образуют, очевидно, непустое множество. Кроме того, имеет место неравенство

$$|F(t, g)| \leq D.$$

В качестве оператора  $A$  имеем некоторое преобразование  $S$ , которое, как показано выше, переводит функцию из класса  $C(D, \Delta)$  в функцию того же класса.

Для любой пары функций  $F$  и  $\bar{F}$  имеет место

$$|S\bar{F} - SF| \leq \frac{1}{2} \|\bar{F} - F\|, \quad \text{где } \|\bar{F} - F\| = \sup |\bar{F} - F| \quad (28.35)$$

и, следовательно,  $m = \frac{1}{2}$ .

Покажем, что выполняется также и второе условие, т. е. что последовательность из функций  $F_n$ , принадлежащих классу  $C(D, \Delta)$ , равномерно сходится к функции  $F$ , также принадлежащей классу  $C(D, \Delta)$ .

Для этого возьмем функцию  $F_0$  и построим функцию  $F_1 = SF_0$ , которую назовем первым приближением уравнения  $F = SF$ , при этом  $F_1 \in C(D, \Delta)$ . Затем можем построить второе приближение  $F_2 = SF_1$ , которое также будет принадлежать  $C(D, \Delta)$ . И, вообще, можем построить  $(p+1)$ -е приближение:

$$F_{p+1} = SF_p, \quad (28.36)$$

также принадлежащее классу  $C(D, \Delta)$ .

Таким образом, получим последовательность функций

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots, \quad (28.37)$$

принадлежащих  $C(D, \Delta)$ .

Покажем, что эта последовательность равномерно сходится к функции  $F$ , также принадлежащей классу функций  $C(D, \Delta)$ .

\*) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., t. III, 1922.

Для этого рассмотрим ряд

$$F_0 + (F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \dots + (F_{n+1} - F_n) + \dots \quad (28.38)$$

Если  $|F_0| \leq M_0$  и  $|F_1| \leq M_1$  (в силу того, что функции ограничены), то

$$|F_1 - F_0| \leq M_0 + M_1 = M.$$

В силу свойства (28.4) преобразования  $S$  имеем:

$$|F_{n+1} - F_n| = |S(F_n) - S(F_{n-1})| \leq m \sup |F_n - F_{n-1}| \quad (28.39)$$

$$\left( m = \frac{1}{2} \right).$$

Поэтому члены ряда (28.38) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда с постоянными положительными членами

$$M_0 + M + Mm + Mm^2 + \dots \quad \left( m = \frac{1}{2} \right),$$

и, следовательно, последовательность (28.37), члены которой являются частичными суммами ряда (28.38), равномерно сходится к некоторой функции  $F$ .

Функции  $F_n$ , принадлежащие классу  $C(D, \Delta)$ , являются периодическими по  $g$  с периодом  $2\pi$  и удовлетворяют неравенствам (28.12).

Так как  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ , а  $F_n$  удовлетворяют этим свойствам независимо от  $n$ , то этим же свойствам будет удовлетворять и  $F$ , что означает, что  $F$  также принадлежит классу функций  $C(D, \Delta)$ .

Итак, все условия теоремы выполнены, и следовательно, уравнение  $F = SF$  имеет единственное решение.

Обозначим его через

$$F = f(t, g, \varepsilon). \quad (28.40)$$

По самому определению  $F$  оно принадлежит классу  $C(D, \Delta)$  и удовлетворяет условиям (28.12).

Путем дифференцирования итерационных формул (28.36) нетрудно установить, что если  $P(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  в области

$$t \in R, \quad g \in \Omega, \quad h \in U, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

имеют ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по  $g$ ,  $h$  до  $m$ -го порядка включительно, то производные от  $F_p$  по  $g$  до  $m$ -го порядка также будут равномерно сходиться.

Для этого рассмотрим последовательность, составленную из  $F_p^{(r)}$ :

$$F_0^{(r)}, F_1^{(r)}, \dots, F_p^{(r)}, \dots \quad (28.41)$$

и ряд

$$F_0^{(r)} + |F_1^{(r)} - F_0^{(r)}| + |F_2^{(r)} - F_1^{(r)}| + \dots + |F_{p+1}^{(r)} - F_p^{(r)}| + \dots \quad (28.42)$$

В силу существования непрерывных производных от  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  по  $g$ ,  $h$ ,

а также равномерной сходимости интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q(t+z, g, h, \varepsilon) dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q^{(r)}(t+z, g, h, \varepsilon) dz,$$

что очевидно в силу (28.11), а также ограниченности функций  $Q(t+z, g, h, \varepsilon)$  и их производных по  $g, h$  до  $m$ -го порядка, следует, что в выражении (28.22) можно дифференцировать под знаком интеграла по  $g$ :

$$F_{p+1}^{(r)} = SF_p^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t_0}^{F_p}, F_p, \varepsilon\} dz \quad (28.43)$$

$$(r = 1, 2, \dots, m).$$

Если  $|F_0^{(r)}| < N_0$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ), то принимая во внимание ограниченность производных от  $Q(t+z, g, h, \varepsilon)$  по  $g, h$  до  $m$ -го порядка, имеем  $|F_1^{(r)}| \leq N_1$  и, следовательно,

$$|F_1^{(r)} - F_0^{(r)}| \leq N_0 + N_1 = N_2. \quad (28.44)$$

В силу (28.19) находим

$$|F_2^{(r)} - F_1^{(r)}| = |SF_1^{(r)} - SF_0^{(r)}| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} J(z) [Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\} - Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_0}, F_0, \varepsilon\}] dz \right| \leq$$

$$\leq \lambda_1(\varepsilon, D) |F_1 - F_0| = \lambda_1(\varepsilon, D) M = N,$$

$$|F_3^{(r)} - F_2^{(r)}| = |SF_2^{(r)} - SF_1^{(r)}| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} J(z) [Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_2}, F_2, \varepsilon\} - Q^{(r)}\{t+z, T_{z,t}^{F_1}, F_1, \varepsilon\}] dz \right| \leq$$

$$\leq \lambda_1(\varepsilon, D) |F_2 - F_1| \leq \lambda_1(\varepsilon, D) \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} N. \quad (28.45)$$

Аналогичным образом получаем оценки для

$$|F_4^{(r)} - F_3^{(r)}|, \dots, |F_{p+1}^{(r)} - F_p^{(r)}|, \dots$$

и убеждаемся, что члены ряда (28.42) не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося ряда с положительными членами

$$N_0 + N_2 + N + \frac{1}{2} N + \frac{1}{4} N + \dots$$

и поэтому последовательность, составленная из ограниченных и равномерно непрерывных функций  $F_n^{(r)}$ , равномерно сходится

$$F_n^{(r)} \Rightarrow \Phi. \quad (28.46)$$

С другой стороны, так как последовательность  $\{F_n\}$  равномерно сходится к функции  $f_1$ :

$$F_n \Rightarrow f_1$$

(что было показано), то эту последовательность можно почленно дифференцировать и, следовательно, согласно (28.46)

$$\Phi = f_1^{\prime}(\cdot),$$

т. е.  $f_1(t, g, \varepsilon)$  имеет ограниченные и равномерно-непрерывные производные по  $g$  до  $m$ -го порядка включительно.

Таким образом, мы установили, что функция  $f(t, g, \varepsilon)$  удовлетворяет условиям леммы I, и поэтому для завершения доказательства леммы остается показать, что соотношения

$$h = f(t, g, \varepsilon) \quad (28.47)$$

определяют интегральное многообразие для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (28.1).

Для этого раскроем уравнение  $F = SF$ .

Учитывая (28.22) и (28.47), получаем:

$$f(t, g, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z) Q\{t+z; T_{z,t}^f(g); f[t+z; T_{z,t}^f(g)]; \varepsilon\} dz. \quad (28.48)$$

Заменим здесь  $g$  на  $T_{t-t_0, t_0}^f(g)$  и заметим, что согласно нашим обозначениям

$$T_{t-t_0, t_0}^f(g^0) = g_t, \quad T_{0, t_0}^f(g^0) = g^0$$

имеем тождественно:

$$T_{z,t}^f T_{t-t_0, t_0}^f = T_{z+t-t_0, t_0}^f.$$

Тогда, вводя вместо  $z$  в качестве новой переменной интегрирования  $\tau = z + t$  и полагая для упрощения

$$f\{t; T_{t-t_0, t_0}^f(g), \varepsilon\} = h_t; \quad T_{t-t_0, t_0}^f(g) = g_t,$$

из (28.48) получаем:

$$\begin{aligned} h_t &= \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau = \int_{-\infty}^t J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + \\ &\quad + \int_t^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau. \end{aligned} \quad (28.49)$$

Дифференцируя это равенство по  $t$  как по параметру, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dh_t}{dt} &= - \int_{-\infty}^t \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(-0) Q(t, g_t, h_t, \varepsilon) - \\ &\quad - \int_t^{\infty} \frac{dJ(\tau - t)}{dt} Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau - J(+0) Q(t, g_t, h_t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Учитывая (28.6) и условие разрыва (28.7), окончательно находим:

$$\frac{dh_t}{dt} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dJ(\tau-t)}{dt} Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon),$$

или согласно (28.49):

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon).$$

С другой стороны, по определению оператора  $T_{t-t_0, t_0}^f$  имеем:

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon),$$

Таким образом,

$$g_t = T_{t-t_0, t_0}^f(g); \quad h_t = f(t, g_t, \varepsilon) \quad (28.50)$$

представляет решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (28.1), сводящееся при  $t = t_0$  к  $g; f(t_0, g, \varepsilon)$ .

Итак, найденное многообразие (28.47) является интегральным многообразием для системы (28.1), удовлетворяя неравенствам (28.2) и (28.3) (в силу выбора класса функций  $C(D, \Delta)$ , для которого выполняется условие (28.2)), обладает по отношению к угловой переменной  $g$  периодом  $2\pi$  и, кроме того, если  $P(t, g, h, \varepsilon), Q(t, g, h, \varepsilon)$  при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  имеют в области  $R\Omega U_0$  ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по  $g, h$  до  $m$ -го порядка включительно, то  $h = f(t, g, \varepsilon)$  также будет иметь ограниченные и равномерно непрерывные частные производные по  $g$  до  $m$ -го порядка включительно.

Таким образом, лемма I полностью доказана.

Укажем теперь следствие из доказанной леммы.

Следствие. Из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon) \end{aligned}$$

видим, что угловая переменная  $g$  для решений, лежащих на многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g, \varepsilon), \quad (28.51)$$

в котором

$$F(t, g, \varepsilon) = P(t, g, f(t, g, \varepsilon), \varepsilon).$$

При этом на основании леммы I  $F(t, g, \varepsilon)$  определена для всех вещественных  $t, g$  является периодической функцией  $g$  с периодом  $2\pi$  и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$|F(t, g, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0, \quad (28.52)$$

$$|F(t, g', \varepsilon) - F(t, g'', \varepsilon)| \leq N(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0. \quad (28.53)$$

Кроме того, если  $P(t, g, h, \varepsilon)$  обладает непрерывными производными по  $g, h$  до  $m$ -го порядка включительно, то  $F(t, g, \varepsilon)$  также будет обладать непрерывными производными по  $g$  до  $m$ -го порядка включительно.

**Лемма II.** Если существует последовательность вещественных чисел  $\{\tau_m\}$  такая, что для некоторого  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  правые части уравнений (27.105) удовлетворяют равномерно на  $R\Omega_U$ , соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} |P(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0, \\ |Q(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad m \rightarrow \infty, \quad (28.54)$$

то тогда для этого  $\varepsilon$  равномерно на  $R\Omega$  будем иметь:

$$|f(t + \tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (28.55)$$

где  $f(t, g, \varepsilon)$  — интегральное многообразие, для системы дифференциальных уравнений (27.105).

**Доказательство.** Возьмем некоторую функцию  $F(t, g)$  из класса  $C(D, \Delta)$ , где, как и в лемме I,  $D$  и  $\Delta$  выбраны как функции  $\varepsilon$ :

$$D = D(\varepsilon), \quad \Delta = \Delta(\varepsilon).$$

Заметим, что при доказательстве леммы I решение уравнения

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g, F(t, g), \varepsilon) \quad (28.56)$$

мы обозначим следующим образом:

$$g_t = T_{z, t_0}^F(g^0), \quad (28.57)$$

где  $z = t - t_0$ . Следовательно, здесь переменная  $t$ , а также индекс при  $g$  равнялись сумме нижних индексов при  $T$ :

$$t = z + t_0,$$

и следовательно, подставляя (28.57) в (28.56), можем записать:

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(z + t_0, g_t, F[z + t_0, g_t], \varepsilon). \quad (28.58)$$

Рассмотрим теперь следующие выражения:

$$y_z = T_{z, t}^F(g); \quad y_z^\tau = T_{z, t+\tau}^F(g); \quad (28.59)$$

в силу (28.56), (28.57) и (28.58) видим, что эти выражения будут удовлетворять следующим двум уравнениям:

$$\frac{dy_z}{dz} = G(\varepsilon) + P\{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}, \quad (28.60)$$

$$\frac{dy_z^\tau}{dz} = G(\varepsilon) + P\{z + t + \tau; y_z^\tau; F[z + t + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon\}, \quad (28.61)$$

где  $z + t$ ,  $z + t + \tau$  также представляют собой сумму нижних индексов соответственно у функций  $y_z = T_{z, t}^F(g)$  и  $y_z^\tau = T_{z, t+\tau}^F(g)$ , причем здесь дифференцирование по  $t$  заменено дифференцированием по  $z$ .

Условимся обозначать:

$$\|P_\tau - P\| = \sup_{t, g, h} |P(t + \tau, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)|; \quad (28.62)$$

$$\|F_\tau - F\| = \sup_{t, g} |F(t + \tau, g) - F(t, g)| \quad (28.63)$$

для  $t \in R$ ;  $g \in \Omega$ ;  $h \in U_\rho$ .

Вычитая (28.60) из (28.61), получим:

$$\frac{d(y_z^\tau - y_z)}{dz} = P\{z + t + \tau; y_z^\tau; F[z + t + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P\{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}. \quad (28.64)$$

Применяя обычный мажорационный прием, оценим, учитывая неравенства (28.14), (28.15), правую часть полученного уравнения.

Имеем:

$$\begin{aligned} & |P\{z + t + \tau; y_z^\tau; F[z + t + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P\{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}| = \\ & = |P\{z + t + \tau; y_z^\tau; F[z + t + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon\} - P\{z + t + \tau; y_z; F[z + t + \tau; y_z]; \varepsilon\} + \\ & + P\{z + t + \tau; y_z; F[z + t + \tau; y_z]; \varepsilon\} - P\{z + t + \tau; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\} + \\ & + P\{z + t + \tau; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\} - P\{z + t; y_z; F[z + t; y_z]; \varepsilon\}| \leqslant \\ & \leqslant \lambda(\varepsilon, D) \{|y_z^\tau - y_z| + |F(z + t + \tau; y_z^\tau) - F(z + t + \tau; y_z)|\} + \\ & - \lambda(\varepsilon, D) \|F[z + t + \tau, y_z] - F[z + t, y_z]\| + \|P_\tau - P\|, \end{aligned} \quad (28.65)$$

или, принимая во внимание, что согласно (28.12) имеет место неравенство

$$|F(z + t + \tau, y_z^\tau) - F(z + t + \tau, y_z)| \leq \Delta |y_z^\tau - y_z|, \quad (28.66)$$

находим:

$$\left| \frac{d(y_z^\tau - y_z)}{dz} \right| \leq \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |y_z^\tau - y_z| + \lambda(\varepsilon, D) \|F_\tau - F\| + \|P_\tau - P\|. \quad (28.67)$$

Решая полученное дифференциальное неравенство, окончательно получим:

$$|y_z^\tau - y_z| \leq \frac{\|P_\tau - P\| + \lambda(\varepsilon, D) \|F_\tau - F\|}{\lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta)} \{ \exp[\lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |z|] - 1 \}. \quad (28.68)$$

С другой стороны, по определению преобразования  $S_{t, g}(F)$ , (28.22) имеем:

$$\begin{aligned} S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} J(z) \{Q[t + z + \tau; y_z^\tau; F[t + z + \tau; y_z^\tau]; \varepsilon] - \\ &- Q[t + z; y_z; F[t + z; y_z]; \varepsilon]\} dz. \end{aligned} \quad (28.69)$$

Мажорируя правую часть (28.69), учитывая при этом, что

$$|J(z)| \leq K e^{-\alpha|z|},$$

находим:

$$\begin{aligned} |S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| &\leq K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|} \{ \lambda(\varepsilon, D) (1 + \Delta) |y_z^\tau - y_z| + \\ &+ \|Q_\tau - Q\| + \lambda(\varepsilon, D) \|F_\tau - F\| \} d\tau. \end{aligned} \quad (28.70)$$

Выберем теперь  $D$  и  $\Delta$  такими же, как в лемме I, т. е. положим, что для  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  выполняются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2K}{\alpha} \{M(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D)D\} &< D; \quad \frac{4K}{\alpha} \lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta) < \Delta; \\ (1+\Delta)\lambda(\varepsilon, D) &< \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{8\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} K < 1, \end{aligned} \right\} \quad (28.71)$$

где  $D(\varepsilon) \rightarrow 0$ ,  $\Delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Принимая во внимание (28.68), из (28.70) получаем:

$$\begin{aligned} |S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| &\leqslant \\ &\leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|z|} \left\{ \lambda(1+\Delta) \left[ \frac{\|P_\tau - P\| + \lambda \|F_\tau - F\|}{\lambda(1+\Delta)} (e^{\lambda(1+\Delta)|z|} - 1) \right] + \|Q_\tau - Q\| + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \|F_\tau - F\| \right\} dz = K \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-\alpha|z|} + \lambda(1+\Delta)|z| (\|P_\tau - P\| + \lambda \|F_\tau - F\|) - \\ &\quad - e^{-\alpha|z|} (\|P_\tau - P\| + \lambda \|F_\tau - F\|) + e^{-\alpha|z|} (\|Q_\tau - Q\| + \lambda \|F_\tau - F\|)\} dz = \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-\alpha|z|} + \lambda(1+\Delta)|z| (\|P_\tau - P\| + \lambda \|F_\tau - F\|) + e^{-\alpha|z|} (\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|)\} dz. \end{aligned} \quad (28.72)$$

Так как  $\lambda(1+\Delta) < \frac{\alpha}{2}$ , то

$$K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha|z| + \lambda(1+\Delta)|z|\} dz < \frac{4K}{\alpha}, \quad (28.73)$$

и из (28.72) имеем:

$$\begin{aligned} |S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| &\leqslant \frac{4K}{\alpha} (\|P_\tau - P\| + \lambda \|F_\tau - F\|) + \\ &\quad + \frac{2K}{\alpha} (\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|), \end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что  $\frac{8K\lambda(\varepsilon, D)}{\alpha} < 1$ , окончательно получаем:

$$|S_{t+\tau, g}(F) - S_{t, g}(F)| \leqslant \frac{1}{2} \|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha} (\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|),$$

или сокращенно

$$|(SF)_\tau - SF| \leqslant \frac{1}{2} \|F_\tau - F\| + \frac{2K}{\alpha} (\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|). \quad (28.74)$$

Заметим теперь, что в лемме II функции  $F(t, g)$  удовлетворяют всем условиям, необходимым для выполнения принципа Каччионоли — Банаха. Поэтому уравнение

$$F = SF \quad (28.75)$$

имеет единственное решение, которое мы обозначим, так же как и в лемме I, через

$$F = f(t, g, \varepsilon). \quad (28.76)$$

Очевидно, что в данном случае последовательность  $\{F_n\}$  будет равномерно сходиться к функции  $f(t, g, \varepsilon)$ :

$$\|F_N - f\| \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (28.77)$$

Обозначим теперь ради сокращения:

$$\sigma_\tau = \frac{2K}{\alpha} \{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \quad (28.78)$$

Тогда из (28.73), полагая поочередно:  $F = F_1, F = F_2, \dots$ , получим:

$$\begin{aligned} \|(F_1)_\tau - F_1\| &\leq \sigma_\tau; \quad \|(F_2)_\tau - F_2\| \leq \frac{1}{2} \|(F_1)_\tau - F_1\| + \sigma_\tau = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_\tau + \sigma_\tau = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sigma_\tau; \\ \|(F_3)_\tau - F_3\| &\leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \sigma_\tau; \dots \end{aligned}$$

Вообще

$$\|(F_N)_\tau - F_N\| \leq 2\sigma_\tau. \quad (28.79)$$

Так как согласно (28.77)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = f,$$

то очевидно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (F_N)_\tau = f_\tau.$$

Поэтому, переходя в (28.79) к пределу, получаем:

$$\|f_\tau - f\| \leq 2\sigma_\tau,$$

или, раскрывая это соотношение, принимая во внимание (28.78), видим, что везде на  $R\Omega$  для любого  $\tau$  имеет место неравенство

$$|f(t + \tau, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \leq \frac{4K}{\alpha} \{\|Q_\tau - Q\| + \|P_\tau - P\|\}. \quad (28.80)$$

Пусть теперь  $\{\tau_m\}$  будет последовательностью из  $R$  такой, что для некоторого  $\varepsilon' < \varepsilon$  равномерно на  $R\Omega$  выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} |Q(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - Q(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0, \\ |P(t + \tau_m, g, h, \varepsilon) - P(t, g, h, \varepsilon)| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Тогда для этого  $\varepsilon$

$$\|Q_{\tau_m} - Q\| \rightarrow 0, \quad \|P_{\tau_m} - P\| \rightarrow 0$$

при  $m \rightarrow \infty$ , и, следовательно, согласно (28.80) равномерно на  $R\Omega$  выполняется соотношение

$|f(t + \tau_m, g, \varepsilon) - f(t, g, \varepsilon)| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ ,

доказывающее лемму II.

Из доказанной леммы вытекает следующее следствие.

**Следствие.** Если функции  $P(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $Q(t, g, h, \varepsilon)$  являются почти периодическими функциями  $t$  равномерно по отношению к  $g, h$  в области  $\Omega U_\rho$ , то тогда и  $F(t, g, \varepsilon)$  оказывается почти периодической функцией равномерно по отношению к  $g \in \Omega$  с частотным базисом функций  $P(t, g, h, \varepsilon)$ ,  $Q(t, g, h, \varepsilon)$ . Справедливость этого следствия очевидна после сопоставления формулировки леммы II, следствия к лемме I и определения почти периодических функций (см. стр. 353).

Заметим, что из следствия к лемме II, а также из самой леммы вытекает следующий результат:

Если  $f(t, x)$  есть функция почти периодическая равномерно по отношению к  $x$ , а множество  $\{\omega_a\}$  является ее частотным базисом, то тогда  $F(t, x)$  также будет функцией почти периодической равномерно по отношению к  $x$  с тем же частотным базисом.

**Лемма III.** Можно указать такие положительные постоянные  $\varepsilon'$ ,  $\gamma$ ,  $C$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  (причем  $\sigma_0 < \sigma_1 < \rho$ ,  $\varepsilon' < \bar{\varepsilon}$ ), что если  $s$  характеристических чисел матрицы  $H$  имеют отрицательные вещественные части, а остальные  $n - 1 - s$  — положительные, то для каждого  $\varepsilon < \varepsilon'$ , любого вещественного  $t_0$  и любого  $g_0$  из  $\Omega$  в некоторой окрестности  $U_{\sigma_0}$  существует  $s$ -мерное многообразие  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  точек  $\{h\}$  со свойствами:

1) Если \*) для  $t = t_0$

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \text{ но } h_t \notin \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon),$$

то тогда для некоторого  $\bar{t} > t_0$

$$h_{\bar{t}} \notin U_{\sigma_1}.$$

2) Если для  $t = t_0$

$$h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon),$$

то тогда для всех  $t \geq t_0$

$$|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)| \leq C e^{-\gamma |t - t_0|} |h_0 - f(t_0, g_0, \varepsilon)|,$$

где  $(g_0, h_0)$  представляют  $(g_t, h_t)$  при  $t = t_0$ ,  $\gamma$  — положительная постоянная.

3) Если все характеристические числа матрицы имеют положительные вещественные части ( $s = 0$ ), то многообразие  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  вырождается в точку  $h = f(t_0, g_0, \varepsilon)$ .

4) Если, наоборот, вещественные части всех характеристических чисел матрицы  $H$  отрицательны, то многообразие  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  совпадает со всей окрестностью  $U_{\sigma_0}$ .

Таким образом, лемма утверждает, что если начальные значения какого-либо решения системы (27.105) не принадлежат к точечному  $s$ -мерному многообразию  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ , лежащему в  $(n - 1)$ -мерной окрестности  $U_{\sigma_0}$ , то с течением времени это решение будет удаляться от  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  и, в частности, выйдет из некоторой области  $U_{\sigma_1}$ , где  $\sigma_1 > \sigma_0$ . И наоборот, те интегральные кривые, начальные значения которых принадлежат  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ , с течением времени будут стремиться к  $s$ -мерному многообразию интегральных кривых, параметрическое представление которых мы обозначили через  $f(t, g_t, \varepsilon)$ .

\*) Здесь, как обычно,  $g = g_t$ ,  $h = h_t$  обозначает решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (27.105).

**Доказательство.** Вместо дифференциальной системы (27.105) будем рассматривать интегро-дифференциальную систему:

$$\left. \begin{aligned} h_t &= \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) A; \\ \frac{dg_t}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (28.81)$$

(при  $t = t_0$ ,  $g_t = g_0$ ),

где  $A$  — некоторый произвольный фиксированный вектор из  $E_{n-1}$ .

Применяя для исследования этой системы способы получения оценок, применявшиеся в лемме I, для значений  $\varepsilon'$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ , подчиненных условиям

$$\varepsilon' < \bar{\varepsilon}, \quad D(\varepsilon') < \sigma_0, \quad \sigma_0 < \sigma_1 < \rho \quad (28.82)$$

(где  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\rho$  определены в лемме I), нетрудно установить следующий результат.

Для любого значения параметра  $\varepsilon$  и любого вектора  $A$  из  $E_{n-1}$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \varepsilon < \varepsilon', \quad |A| < \sigma_0;$$

- а) система (28.81) имеет одно-единственное решение  $(g_t, h_t)$ , для которого  $h_t \in U_{\sigma_1}$  для всех  $t \geq t_0$ ;  
 б) для этого решения

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad (28.83)$$

где  $\Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon)$  — непрерывная функция своих аргументов, удовлетворяющая условию Липшица вида

$$|\Psi(t_0, t, g', A', \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g'', A'', \varepsilon)| \leq v(\varepsilon, \sigma_0) |g' - g''| + \\ + \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{\alpha}{2}|t - t_0|} |A' - A''|, \quad t \geq t_0, \quad (28.84)$$

где  $v(\varepsilon, \sigma_0)$  и  $\mu(\varepsilon, \sigma_0)$  стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\sigma_0 \rightarrow 0$ , а  $\frac{\alpha}{2}$  — некоторая положительная постоянная.

Дифференцируя выражение

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t - t_0) A, \quad t < t_0,$$

по  $t$  как по параметру, на основании уравнения

$$\frac{dJ}{dt} = -HJ = -JH \quad \text{при } t \neq 0$$

и условия разрыва

$$J(-0) - J(+0) = E$$

видим, что решения интегро-дифференциальной системы являются реше-

ниями системы дифференциальных уравнений (27.105):

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon).\end{aligned}$$

Назовем решением типа  $S$  любое решение уравнений (27.105), для которого  $h_0 \in U_{\sigma_0}$ ,  $h_t \in U_{\sigma_1}$  для всех  $t > t_0$ .

Покажем, что всякое решение типа  $S$  является решением интегро-дифференциальной системы (28.81) при  $A = h_0$ .

Для решения  $(g_t, h_t)$  системы (27.105), очевидно, имеет место

$$\frac{dh_t}{dt} = Hh_t + Q(t, g_t, h_t, \varepsilon). \quad (28.85)$$

Умножим обе части этого тождества на  $J(\tau - t)$  ( $\tau$  — новая переменная интегрирования) и, проинтегрировав полученное соотношение в пределах от  $t$  до  $\infty$  и от  $t_0$  до  $t$ , получим:

$$\int_t^\infty J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau = \int_t^\infty J(\tau - t) Hh_\tau d\tau + \int_t^\infty J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau, \quad (28.86)$$

$$\int_{t_0}^t J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t J(\tau - t) Hh_\tau d\tau + \int_{t_0}^t J(\tau - t) Q(\tau, g_\tau, h_\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (28.87)$$

Интегрируя по частям левые части выражений (28.86) и (28.87), находим:

$$\begin{aligned}\int_t^\infty J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= -J(+0)h_t - \int_t^\infty \frac{dJ(\tau - t)}{d\tau} h_\tau d\tau, \\ \int_{t_0}^t J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t \frac{dJ(\tau - t)}{d\tau} h_\tau d\tau.\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение

$$\frac{dJ}{dt} = -JH = -HJ, \quad t \neq t_0,$$

последние соотношения можем записать в виде:

$$\left. \begin{aligned}\int_t^\infty J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= -J(+0)h_t + \int_t^\infty J(\tau - t) Hh_\tau d\tau, \\ \int_{t_0}^t J(\tau - t) \frac{dh_\tau}{d\tau} d\tau &= J(-0)h_t - J(t_0 - t)h_0 + \int_{t_0}^t J(\tau - t) Hh_\tau d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (28.88)$$

Складывая теперь тождества (28.86) и (28.87) с учетом (28.88) и условия разрыва для матрицы  $J(t)$  при  $t = 0$ :

$$J(-0)h_t - J(+0)h_t = h_t,$$

убеждаемся, что

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) h_0 \quad (28.89)$$

тождественно, откуда следует, что наше решение  $(g_t, h_t)$  удовлетворяет интегро-дифференциальной системе (28.81) при  $A = h_0$ .

Но решение интегро-дифференциальной системы существует лишь для  $|A| < \sigma_0$ ; поэтому  $h_0$ , стоящее в выражении (28.89), принадлежит  $U_{\sigma_0}$ .

С другой стороны, решение  $h_t$  дифференциальной системы, принадлежащее области  $U_{\sigma_1}$ , начальное значение которого  $h_0$  принадлежит  $U_{\sigma_0}$ , мы называли решением типа  $S$ .

Следовательно, решение типа  $S$  является решением интегро-дифференциальной системы при  $A = h_0$ .

Учитывая, что интегро-дифференциальная система (28.81) имеет решение при  $|A| < \sigma_0$ , допускающее параметрическое представление:

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon),$$

и то, что решения типа  $S$ , т. е. решения дифференциальной системы, для которых  $|h_0| < \sigma_0$ , являются решениями интегро-дифференциальной системы при  $A = h_0$ , для решений дифференциальной системы можем написать:

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0. \quad (28.90)$$

Решения интегро-дифференциальной системы существуют при условиях:

$$\varepsilon' < \bar{\varepsilon}, \quad D(\varepsilon') < \sigma_0, \quad \sigma_0 < \rho, \quad |A| < \sigma_0. \quad (28.91)$$

Следовательно, решения типа  $S$  существуют при тех же условиях.

Но условия (28.91) эквивалентны условиям, при которых существует  $s$ -мерное многообразие интегральных кривых для дифференциальных уравнений (27.105), параметрическое представление которого мы обозначили через  $h = f(t, g, \varepsilon)$ .

Таким образом, условия, при которых существует интегральное многообразие для дифференциальной системы, и условия, при которых существуют решения типа  $S$ , эквивалентны.

Так как решения типа  $S$  являются решениями той же дифференциальной системы, что и  $h = f(t, g, \varepsilon)$ , и существуют при тех же условиях, то отсюда следует, что все решения, лежащие на интегральном многообразии  $h = f(t, g, \varepsilon)$ , принадлежат к типу  $S$ , и, следовательно, они являются одновременно решениями интегро-дифференциальной системы (28.81). Поэтому для каждого из них можно указать соответствующее  $A = A'$ , т. е. эти решения можно представить в виде

$$h = f(t, g, \varepsilon) = \Psi(t_0, t, g, A', \varepsilon'). \quad (28.92)$$

Установив, таким образом, что всем решениям, лежащим на интегральном многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

соответствует некоторое  $A = A'$ , мы в силу того, что все решения интегро-дифференциальной системы являются решениями дифференциальной системы, в равенстве (28.84), справедливом для решений интегро-дифференциальной системы, вместо одного из этих решений можем написать решение (28.92), лежащее на многообразии  $h = f(t, g, \varepsilon)$  и зависящее от  $A = A'$ .

В результате получим:

$$|f(t, g, \varepsilon) - \Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)| \leq \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{1}{2} |t - t_0|} |A' - A|, \quad t \geq t_0, \quad (28.93)$$

где  $f(t, g, \varepsilon)$  представляется формулой (28.92).

Так как решения типа  $S$  являются решениями интегро-дифференциальной системы при  $A = h_0$ , то вместо решения интегро-дифференциальной системы  $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$ , заменяя произвольное фиксированное  $g$  на  $g_t$ , можем взять решение дифференциальной системы  $h_t$ , причем в правой части вместо  $A$ , соответствовавшего  $\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon)$ , будет стоять  $h_0$ , так как  $\Psi$  равно  $h_t$  при  $A = h_0$ ; вместо  $A'$  можем поставить начальное значение  $f(t, g, \varepsilon)$ .

В результате вместо неравенства (28.84), имеющего место для решений интегро-дифференциальной системы, получим следующее неравенство, имеющее место для любого решения  $h_t$  типа  $S$ :

$$|f(t, g_t, \varepsilon) - h_t| \leq \mu(\varepsilon, \sigma_0) e^{-\frac{\alpha}{2} |t - t_0|} |f(t_0, g_0, \varepsilon) - h_0|. \quad (28.94)$$

Рассмотрим теперь множество точек  $\{h\}$  из  $U_{\sigma_0}$ , для которых

$$h = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0,$$

соответствующее данным фиксированным  $t_0, g_0, \varepsilon$ , и обозначим его через  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ .

Тогда, так как для всякого решения типа  $S$  выполняется соотношение (28.90):

$$h_t = \Psi(t_0, t, g_t, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0,$$

то, положив в нем  $t = t_0$ , получим:

$$h_0 = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad |A| < \sigma_0.$$

Следовательно, для всякого решения типа  $S$   $h_0$  должно принадлежать  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ .

Отсюда следует, что если для  $t = t_0$  имеет место:

$$h_t \in U_{\sigma_0}, \text{ но } h_t \notin \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon),$$

то соответствующее этим начальным условиям решение  $(g_t, h_t)$  не может принадлежать к типу  $S$  (так как в силу вышесказанного для решения  $h_t$  типа  $S$  при  $t = t_0$   $h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)$ ) и, следовательно, согласно определению решений типа  $S$ ,  $h_t$  не будет оставаться в окрестности  $U_{\sigma_1}$  для  $t > t_0$ .

Таким образом, первое утверждение леммы III доказано.

Докажем второе утверждение. Как уже отмечалось, решение интегро-дифференциальной системы (28.81), обладающее свойствами а) и в), существование которого выше установлено, является в то же время решением дифференциальных уравнений (27.105).

Благодаря свойству б) имеем:

$$h_0 = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad (28.95)$$

и так как решение дифференциальной системы (27.105) всецело определяется начальными условиями, то очевидно, что если  $(g_t, h_t)$  есть какое-либо решение дифференциальных уравнений (27.105), для кото-

рого справедливо (28.95), то оно является также решением интегро-дифференциальной системы (28.81) и обладает свойствами а) и в).

Таким образом, если для некоторого решения уравнений (27.105) при  $t=t_0$

$$h_t \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon),$$

то тогда оно принадлежит к типу  $S$ , и поэтому для него выполняется неравенство (28.94), что и доказывает второе утверждение леммы.

Докажем теперь третье и четвертое свойства леммы.

Пусть, в самом деле,  $s=0$ . Тогда из определений (28.5) матрицы  $J(t)$ :

$$\begin{aligned} J(t) &= -U \begin{vmatrix} e^{-H_+ t} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} U^{-1} \quad \text{для } t > 0, \\ J(t) &= U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_- t} \end{vmatrix} U^{-1} \quad \text{для } t < 0, \end{aligned}$$

следует:

$$J(t) = -e^{-Ht}, \quad t > 0; \quad J(t) = 0, \quad t < 0, \quad (28.96)$$

вследствие чего интегральное уравнение системы (28.81):

$$h_t = \int_{t_0}^{\infty} J(\tau - t) Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + J(t_0 - t) A, \quad t_0 < t,$$

примет вид,

$$h_t = - \int_t^{\infty} e^{H(\tau-t)} Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau, \quad t > t_0 \quad (28.97)$$

(так как в силу (28.96) для  $t_0 - t < 0$   $J(t_0 - t) = 0$ ), в котором отсутствует произвольный вектор  $A$ . Отсюда следует, что  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ , состоящее из начальных значений  $h_t$  (28.97), вырождается в точку, и так как всегда  $f(t_0, g_0, \varepsilon) \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ , то видим, что в данном случае  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  состоит из одной точки:  $h_0 = f(t_0, g_0, \varepsilon)$ .

Пусть теперь, наоборот,  $s=n-1$ . Тогда по определению (28.5) матрицы  $J(t)$  имеем:

$$J(t) = 0, \quad t > 0; \quad J(t) = e^{-Ht}, \quad t < 0,$$

и интегральное уравнение системы принимает следующий вид:

$$h_t = \int_{t_0}^t e^{H(\tau-t)} Q(\tau, g_{\tau}, h_{\tau}, \varepsilon) d\tau + e^{H(t-t_0)} A, \quad t > t_0, \quad (28.98)$$

откуда, в частности, следует, что  $A = h_0$ .

Однако легко видеть, что уравнение (28.98) является тождеством для любого решения дифференциальных уравнений (27.105) при любом  $h_0$ . Таким образом, в данном случае

$$\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon) = U_{\alpha_0}.$$

Пусть, наконец, и  $s \neq 0$ , и  $n-1-s \neq 0$ . В этом случае член  $J(t-t_0) A$ , посредством которого вектор  $A$  входит в интегро-дифференциальную систему (28.81), может быть представлен в форме:

$$U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{H_-(t-t_0)} \end{vmatrix} U^{-1} A = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-H_-(t-t_0)} \end{vmatrix} U^{-1} a, \quad (28.99)$$

где

$$a = U \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_s \end{vmatrix} U^{-1} A, \quad (28.100)$$

и  $1_s$  является  $s$ -мерной единичной матрицей.

Отсюда можно заключить, что тождественно

$$\Psi(t_0, t, g, A, \varepsilon) = \Psi(t_0, t, g, a, \varepsilon). \quad (28.101)$$

С другой стороны, при произвольном  $A$  вектор  $a$ , определяемый равенством (28.100), имеет всего  $s$  независимых компонент:  $a_1, \dots, a_s$ , вследствие чего уравнения

$$h = \Psi(t_0, t_0, g_0, A, \varepsilon), \quad (28.102)$$

характеризующие многообразие  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ , могут быть представлены в виде

$$h = h(a_1, \dots, a_s),$$

где  $h(a_1, \dots, a_s)$  — функции  $s$  параметров, зависящие от  $t_0, g_0, \varepsilon$  и удовлетворяющие в силу (28.84) условиям Липшица.

Итак,  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  —  $s$ -мерное многообразие, что и завершает доказательство леммы III.

**П р и м е ч а н и е.** Из леммы III следует, что в окрестности  $\Omega U_{g_0}$  может находиться лишь одно-единственное интегральное многообразие для системы (27.105), а именно многообразие

$$h = f(t, g, \varepsilon).$$

В самом деле, это утверждение очевидно в случае  $s=0$ . Случай  $s=n-1$  переходит в первый, если в уравнениях заменить  $t$  на  $-t$ .

Остается рассмотреть случай:  $0 < s < n-1$ .

Пусть в окрестности  $\Omega U_{g_0}$  лежит некоторое интегральное многообразие системы (27.105), которое мы обозначим через  $S_t$ :

$$S_t \in \Omega^1 U_{g_0}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Покажем, что оно будет единственным для системы (27.105).

Из леммы III следует, что если  $g_0, h_0 \in S_t$ , то должно быть

$$h_0 \in \mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon).$$

Возьмем теперь произвольное малое положительное  $\eta$  и выберем такое положительное  $z$ , чтобы удовлетворялось следующее неравенство:

$$2\sigma_0 C e^{-\gamma z} < \eta, \quad (28.103)$$

где  $\gamma$  — положительная постоянная.

Затем возьмем произвольное вещественное  $t_1$  и положим  $t_0 = t_1 - z$ . Тогда вместо (28.103) получим:

$$2\sigma_0 C e^{-\gamma(t_1-t_0)} < \eta. \quad (28.104)$$

Рассмотрим некоторое другое интегральное многообразие системы (27.105)  $S_{t_1}$ , также находящееся в окрестности  $\Omega U_{g_0}$ . Пусть  $(g, h)$  будет произвольной точкой  $S_{t_1}$ .

По определению интегрального многообразия  $S_t$  решение  $(g_t, h_t)$  системы (27.105), которое принимает значение  $(g, h)$  при  $t = t_1$ , лежит на  $S_t$  при любом  $t$ . В частности,  $(g_{t_0}, h_{t_0}) \in S_{t_0}$ , и поэтому

$$h_{t_0} \in \mathfrak{M}(t_0, g_{t_0}, \varepsilon).$$

Но тогда согласно лемме III имеем:

$$|h - f(t_1, g, \varepsilon)| = |h_{t_1} - f(t_1, g_{t_1}, \varepsilon)| \leq C e^{-\gamma(t_1-t_0)} |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|,$$

или в силу (28.104)

$$|h - f(t_1, g, \varepsilon)| = |h_{t_1} - f(t, g_{t_1}, \varepsilon)| < 2\sigma_0 C e^{-\gamma(t_1-t_0)} < \eta,$$

откуда вследствие произвольности  $\eta$

$$h = f(t_1, g, \varepsilon). \quad (28.105)$$

Таким образом, из соотношения  $(g, h) \in S_{t_1}$  следует (28.105), что и доказывает наше утверждение о единственности интегрального многообразия для системы уравнений (27.105).

Остановимся еще на некоторых следствиях из этой леммы.

**Следствие 1.** Согласно доказанной лемме очевидно, что, если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнения

$$\text{Det } pI_{n-1} - H = 0 \quad (28.106)$$

положительна, рассматриваемое интегральное многообразие  $h = f(t, g, \varepsilon)$  обладает свойством отталкивания всех близких к нему решений, за исключением решений, начальные значения которых лежат на особом точечном многообразии  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$ , причем размерность  $\mathfrak{M}(t_0, g_0, \varepsilon)$  меньше, чем размерность всего фазового пространства.

Таким образом, в этом случае любое решение, лежащее на интегральном многообразии

$$h = f(t, g, \varepsilon),$$

оказывается неустойчивым.

Если вещественные части всех корней уравнения (28.106) отрицательны, то данное многообразие, наоборот, обладает свойством притяжения близких решений:

$$|h_t - f(t, g_t, \varepsilon)| \leq C |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)| e^{-\gamma|t-t_0|}. \quad (28.107)$$

**Следствие 2.** Рассмотрим первое уравнение системы (27.105)

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon)$$

и к правой части его добавим, а затем вычтем выражение

$$F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon),$$

В результате получим:

$$\frac{dg_t}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g_t, \varepsilon) + P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon),$$

или

$$\frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) = P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Применяя обычный мажорационный прием к правой части полученного равенства, учитывая при этом свойство г) функции  $P(t, g, h, \varepsilon)$  (см. стр. 353), находим:

$$\left| \frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) \right| = \\ = |P(t, g_t, h_t, \varepsilon) - P(t, g_t, f(t, g_t, \varepsilon), \varepsilon)| \leq \lambda(\varepsilon, \sigma) |h_t - f(t, g_t, \varepsilon)|,$$

где  $\lambda(\varepsilon, \sigma) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ , откуда, принимая во внимание неравенство (28.107), окончательно получаем:

$$\left| \frac{dg_t}{dt} - G(\varepsilon) - F(t, g_t, \varepsilon) \right| \leq C \lambda(\varepsilon, \sigma) e^{-\gamma(t-t_0)} |h_{t_0} - f(t_0, g_{t_0}, \varepsilon)|. \quad (28.108)$$

### § 29. Соответствие между точными и приближенными решениями основного уравнения на бесконечном интервале

Перейдем теперь к приложению лемм, доказанных в предыдущем параграфе.

Эти леммы были нами сформулированы применительно к системе уравнений (27.105), к которой было приведено при соответствующих условиях основное уравнение (27.1).

Сформулируем сейчас и докажем ряд теорем, перенеся формулировку свойств решений системы уравнений (27.105) на решения основного дифференциального уравнения (27.1), помня при этом, что в процессе приведения его к виду (27.105) была сделана замена переменной  $\varepsilon t \rightarrow t$ . Начнем со случая квазистатического решения, когда выпадает зависимость от угловой переменной. В этом случае можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема I.** Пусть функция  $X(t, x)$ , входящая в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (29.1)$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) Уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (29.2)$$

в котором

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt, \quad (29.3)$$

имеет квазистатическое решение  $\xi = \xi_0$ .

б) вещественные части всех  $n$  корней характеристического уравнения

$$\text{Det} |pI - X'_0(\xi_0)| = 0, \quad (29.4)$$

составленного для уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X'_{0x}(\xi_0) \delta\xi, \quad (29.5)$$

соответствующих квазистатическому решению  $\xi = \xi_0$ , отличны от нуля.

в) Можно указать такую  $\rho$ -окрестность  $D_\rho$  точки  $\xi_0$ , в которой  $X(t, x)$  — почти периодические функции  $t$ , равномерно по отношению к  $x \in D_\rho$ .

г) Функция  $X(t, x)$  и ее частные производные первого порядка по  $x$  ограничены и равномерно непрерывны по отношению к  $x$  в области

$$-\infty < t < \infty, x \in D_\rho.$$

Тогда можно указать такие положительные постоянные  $\varepsilon', \sigma_0, \sigma_1$  (причем  $\sigma_0 \leq \sigma_1 < \rho$ ), что для всякого положительного  $\varepsilon < \varepsilon'$  справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (29.1) имеет единственное решение  $x = x^*(t)$ , определенное на всем интервале  $(-\infty, \infty)$ , для которого

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < \infty. \quad (29.6)$$

2. Это решение  $x^*(t)$  является почти периодическим с частотным базисом функции  $X(t, x)$ .

3. Можно найти такую функцию  $\delta(\varepsilon)$ , стремящуюся к нулю вместе с  $\varepsilon$ , что будет иметь место

$$|x^*(t) - \xi_0| \leq \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty, \quad (29.7)$$

4. Пусть  $x(t)$  является любым решением уравнения (29.1), отличным от  $x^*(t)$ , удовлетворяющим при некотором  $t = t_0$  неравенству вида

$$|x(t) - \xi_0| < \sigma_0. \quad (29.8)$$

Тогда, если вещественные части всех корней характеристического уравнения (29.4) отрицательны, расстояние  $|x(t) - x^*(t)|$  стремится к нулю для  $t \rightarrow \infty$ , причем

$$|x(t) - x^*(t)| \leq Ce^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)}, \quad (29.9)$$

где  $C$  и  $\gamma$  — положительные постоянные.

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения (29.4) положительны, то можно найти такое  $t_1 > t_0$ , что

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \quad (29.10)$$

Если  $s$  вещественных частей рассматриваемых корней отрицательны, а остальные  $n-s$  положительны, тогда в  $\sigma_0$ -окрестности точки  $\xi_0$  существует  $s$ -мерное точечное многообразие  $\mathfrak{M}_{t_0}$  такое, что из соотношения

$$x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$$

вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при  $t \rightarrow \infty$ ) разности  $|x(t) - \xi_0|$ , а из соотношения

$$x(t_0) \notin \mathfrak{M}_{t_0}$$

следует справедливость неравенства (29.10).

Сделаем теперь некоторые примечания к этой теореме.

Примечание 1. Как видно, в силу свойства 4) решение  $x^*(t)$  будет устойчивым, и притом асимптотически, когда вещественные части всех корней рассматриваемого характеристического уравнения (29.4) отрицательны.

Если вещественная часть хотя бы одного из корней характеристического уравнения (29.4) является положительной, решение  $x^*(t)$  оказывается неустойчивым.

Примечание 2. Пусть в дополнение к условиям теоремы I  $X(t, x)$  является периодической функцией  $t$  с некоторым периодом  $\tau$ , не зависящим от  $x$ .

Тогда, в частности, имеем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X(t, x) dt,$$

и поэтому

$$X_0(\xi) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X(t, \xi) dt.$$

Поскольку частотный базис функции  $X(t, x)$  состоит в этом случае из одного числа  $\frac{2\pi}{\tau}$ , видим на основании свойства 2), что в данном случае решение  $x^*(t)$  будет периодическим с периодом  $\tau$ .

Доказательство теоремы I. Справедливость теоремы I вытекает непосредственно из доказанных в предыдущем параграфе лемм.

Действительно, уравнение (29.1) в рассматриваемом квазистатическом случае путем преобразований

$$x = \xi_0 + b, \quad (29.11)$$

$$b = h + \varepsilon v(t, h) \quad (29.12)$$

приводится к виду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + Q(t, h, \varepsilon), \quad (29.13)$$

где  $Q(t, h, \varepsilon)$  при выполнении условий настоящей теоремы удовлетворяет условиям, приведенным на стр. 353, и, следовательно, решение системы (29.13)  $h = h(t)$  будет обладать свойствами, указанными в леммах.

Поэтому, рассматривая разность

$$|x^*(t) - \xi_0'| = |h + \varepsilon v(t, h)|,$$

убеждаемся на основании леммы I в справедливости свойства 1).

В лемме II установлена почти периодичность  $h(t)$  по  $t$ . Из выражений (27.73), где функции  $B_\eta^*(t, \varphi', b')$  в силу того, что они выражаются через  $X(t, x)$ , являются почти периодическими относительно  $t$  с частотным базисом функции  $X(t, x)$ , следует, что  $v(t, \varphi, b)$  также являются почти периодическими функциями  $t$  с тем же частотным базисом. Поэтому из (29.11) и (29.12) следует, что  $x(t)$  — почти периодическая функция  $t$  с частотным базисом функции  $X(t, x)$ , что и устанавливает справедливость второго свойства теоремы.

Свойство 3) следует из леммы I, так как мы всегда можем положить

$$\delta(\varepsilon) = D(\varepsilon) + \varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta}, \quad (29.14)$$

при этом  $a$  и  $\eta$  выбраны таким образом, что  $\varepsilon G(a) \frac{\zeta(\eta)}{\eta} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$

(см. (27.75)), и, следовательно, так как  $D(\varepsilon)$  также стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то  $\delta(\varepsilon)$  будет стремиться к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для доказательства свойства 4) рассмотрим неравенство

$$|x(t) - x^*(t)| \leq |h(t) - f(t, \varepsilon)| + \varepsilon |v(t, h) - v(t, f)| \leq (1 + \varepsilon\lambda) |h(t) - f(t, \varepsilon)|, \quad (29.15)$$

где  $h(t)$  — любое решение системы (29.13), принадлежащее области  $U_{\sigma_0}$ .

Сопоставляя это неравенство с результатами леммы III, убеждаемся в справедливости четвертого свойства. Таким образом, теорема полностью доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению решений в окрестности периодического решения уравнений первого приближения, когда роль угловой переменной является существенной.

В этом случае может быть доказана следующая теорема:

**Теорема II.** Пусть для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (29.16)$$

выполнены следующие условия:

а) Уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (29.17)$$

где

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt,$$

имеет периодическое решение

$$\xi = \xi(\varepsilon \omega t); \quad \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi). \quad (29.18)$$

б) Вещественные части всех  $(n-1)^*$  характеристических показателей для уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X'_0(\xi(\varepsilon \omega t)) \delta\xi, \quad (29.19)$$

соответствующих периодическому решению (29.18), отличны от нуля, и  $D(\varphi, 0) \neq 0$  (см. (27.46)).

в) Можно найти такую  $\rho$ -окрестность  $U_\rho$  орбиты этого периодического решения, что функция  $X(t, x)$  и ее частные производные по  $x$  до  $m+1$ -го порядка включительно будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к  $x$  в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in U_\rho.$$

г)  $X(t, x)$  — почти периодическая функция  $t$  равномерно по отношению к  $x \in U_\rho$ .

Тогда можно указать такие положительные числа  $\varepsilon'$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  ( $\sigma_0 < \varepsilon' < \sigma_1 < \rho$ ), что при любом положительном  $\varepsilon < \varepsilon'$  будут справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (29.16) имеет единственное интегральное многообразие  $S_t$ , лежащее для всех вещественных  $t$  в области  $U_\rho$ .

\*). Один характеристический показатель, как уже отмечалось, в данном случае всегда равен нулю.

2. Это многообразие  $S_t$  допускает параметрическое представление вида

$$x = f(t, \theta). \quad (29.20)$$

Здесь \*)  $f(t, \theta)$  определена для всех вещественных  $t, \theta$ , обладает периодом  $2\pi$  по отношению к  $\theta$  и является почти периодической функцией  $t$  равномерно по отношению к  $\theta$  с частотным базисом функции  $X(t, x)$ .

Можно найти такую функцию  $\delta(\varepsilon)$ , стремящуюся к нулю вместе с  $\varepsilon$ , что

$$|f(t, \theta) - \xi(\theta)| \leq \delta(\varepsilon).$$

Функция  $f(t, \theta)$  имеет равномерно непрерывные производные по  $\theta$  до  $m$ -го порядка включительно.

3. На многообразии  $S_t$  уравнение (29.16) эквивалентно уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta), \quad (29.21)$$

в котором  $F(t, \theta)$  определена для всех вещественных  $t, \theta$ , является периодической функцией  $\theta$  с периодом  $2\pi$  и почти периодической функцией  $t$  равномерно по отношению к  $\theta$  с частотным базисом функции  $X(t, x)$ ;  $F(t, \theta)$  обладает ограниченными и равномерно непрерывными производными по  $\theta$  до  $m$ -го порядка включительно.

Кроме того, имеют место неравенства:

$$|F(t, \theta) - \Omega(\varepsilon)| \leq \delta^*(\varepsilon); \quad (29.22)$$

$$|F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leq \eta^*(\varepsilon) |\theta' - \theta''|, \quad (29.23)$$

в которых  $\delta^*(\varepsilon), \eta^*(\varepsilon)$  стремятся к нулю вместе с  $\varepsilon$ . Таким образом, всякое решение уравнения (29.16), принадлежащее к многообразию  $S_t$ , представимо в виде

$$x = f(t, \theta(t)), \quad (29.24)$$

где  $\theta = \theta(t)$  есть некоторое решение уравнения (29.24), и, наоборот, выражение (29.24), в котором  $\theta = \theta(t)$  есть решение уравнения (29.21), всегда является решением уравнения (29.16), принадлежащим многообразию  $S_t$ .

4. Если вещественные части всех  $n-1$  рассматриваемых характеристических показателей отрицательны, многообразие  $S_t$  обладает свойством притяжения всех близких к нему решений.

Так, пусть  $x = x(t)$  есть любое решение уравнения (29.16), проходящее при некотором  $t = t_0$  через какую-либо точку области  $U_{\sigma_0}$ :

$$x(t_0) \in U_{\sigma_0}.$$

Тогда для него при  $t > t_0$  будут выполняться неравенства вида:

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leq C_1(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}, \quad (29.25)$$

$$\left| \frac{d\theta(t)}{dt} - \varepsilon F(t, \theta(t)) \right| \leq C_2(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}. \quad (29.26)$$

\*) Для сокращения записи мы не будем отмечать у функции  $f(t, \theta)$  и других аналогичных ей функций их явной зависимости от  $\varepsilon$ .

5. Если все эти вещественные части положительны, то можно найти такое  $t_1 > t_0$ , что

$$x(t_1) \in U_{\sigma_1} \quad (\sigma_1 > \sigma_0). \quad (29.27)$$

6. Если  $s$  рассматриваемых вещественных частей отрицательны, а остальные  $n - 1 - s$  положительны, в области  $U_{\sigma_0}$  существует  $s$ -мерное точечное многообразие  $\mathfrak{M}_{t_0}$  такое, что из соотношения

$$x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$$

вытекает экспоненциальное стремление к нулю выражения (29.25) при  $t \rightarrow \infty$ , а из соотношения

$$x(t_0) \in U_{\sigma_0}, \text{ но } x(t_0) \notin \mathfrak{M}_{t_0}, \quad (29.28)$$

вытекает справедливость соотношения (29.27) при некотором  $t_1 > t_0$ .

Таким образом, если хотя бы одна из вещественных частей рассматриваемых характеристических показателей положительна, многообразие  $S_t$  неустойчиво. Любое не принадлежащее к нему решение  $x(t)$ , для которого  $x(t_0)$  лежит в области  $U_{\sigma_0}$  и не находится на особым точечном многообразии  $\mathfrak{M}_{t_0}$  низшей размерности, с течением времени покинет область  $U_{\sigma_1} (\sigma_1 > \sigma_0)$ .

По поводу этой теоремы заметим, что нас особо будет интересовать важный частный случай, когда  $f(t, \theta)$  и  $F(t, \theta)$  являются периодическими функциями  $t$  с некоторым периодом  $T$  (не зависящим от  $\theta$ ) и число производных  $m$  взято равным двум. Этот случай будет нами специально рассмотрен в следующем параграфе.

**Доказательство теоремы II.** Существование и единственность интегрального многообразия  $S_t$ , параметрическое представление которого, учитывая формулы перехода от  $x$  к  $g, h$ :

$$x = \xi(\varphi) + \frac{1}{2} \{A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*\}, \quad (29.29)$$

$$\varphi = g + \varepsilon u(t, g, h), \quad b = h + \varepsilon v(t, g, h), \quad (29.30)$$

можно представить в виде

$$x = \xi(\theta + \varepsilon u) + \frac{1}{2} \{A(\theta + \varepsilon u)(h + \varepsilon v) + A^*(\theta + \varepsilon u)(h^* + \varepsilon v^*)\} = f(t, \theta), \quad (29.31)$$

вытекает из того, что в леммах I, III нами установлено существование и единственность  $g, h$  (а следовательно, и  $\theta$ , определяемого уравнением (29.21)). В силу того, что  $\varepsilon$  и  $\delta$  нами выбраны так, что

$$\frac{1}{2} |A(\varphi)b + A^*(\varphi)b^*| < \rho, \quad b = h + \varepsilon v, \quad \text{где } |h + \varepsilon v| < \delta,$$

следует:

$$\frac{1}{2} |A(\theta + \varepsilon u)(h + \varepsilon v) + A^*(\theta + \varepsilon u)(h^* + \varepsilon v^*)| < \rho, \quad (29.32)$$

и поэтому

$$x \in U_\rho.$$

Согласно (29.31) многообразие  $S_t$  допускает параметрическое представление

$$x = f(t, \theta),$$

где

$$\begin{aligned} f(t, \theta) = & \xi(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))) + \\ & + \frac{1}{2} \{ A(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))) (f(t, \theta, \varepsilon) + \varepsilon v(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))) + \\ & + A^*(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))) (f^*(t, \theta, \varepsilon) + \varepsilon v^*(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))) \}. \end{aligned}$$

В силу того, что  $\xi(\varphi)$ ,  $A(\varphi)$  являются периодическими функциями  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , а также в силу того, что  $h(t) = f(t, \theta(t))$ , а также  $u(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))$ ,  $v(t, \theta, f(t, \theta, \varepsilon))$ , в силу их определения (см. стр. 345), являются периодическими по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , следует, что функции

$$x = f(t, \theta)$$

будут периодическими по  $\theta$  с тем же периодом  $2\pi$ .

В лемме I доказано, что  $h = f(t, g, \varepsilon)$  имеют ограниченные и равномерно непрерывные производные до  $m$ -го порядка включительно. Так как  $\xi(\varphi)$  и  $A(\varphi)$  также обладают ограниченными и равномерно непрерывными производными  $m$ -го порядка, то из (29.31) видим, что  $f(t, \theta)$  будут обладать ограниченными и равномерно непрерывными производными до  $m$ -го порядка включительно.

Кроме того, всегда можно найти такое  $\delta(\varepsilon)$ , стремящееся к нулю вместе с  $\varepsilon$ , что будет выполняться неравенство

$$|f(t, \theta) - \xi(\theta)| \leq \delta(\varepsilon). \quad (29.33)$$

Утверждение 3) теоремы непосредственно следует из следствия к лемме I, где вместо уравнения (28.51)

$$\frac{dg}{dt} = G(\varepsilon) + F(t, g, \bullet)$$

рассматриваем уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta)$$

относительно переменной  $\theta$ .

Покажем теперь, что многообразие  $S_t$  обладает свойством притяжения всех близких решений в случае, если вещественные части всех  $n-1$  рассматриваемых характеристических показателей отрицательны, т. е. покажем, что имеет место неравенство

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leq C_1(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)},$$

где  $x(t)$  — любое решение уравнения (29.16), проходящее при некотором  $t = t_0$  через какую-либо точку области  $U_{\sigma_0}$ . В силу формулы перехода от  $x$  к  $g$ ,  $h$  (29.31) имеем, учитывая при этом соотношение (28.107):

$$\begin{aligned} |x(t) - f(t, \theta(t))| = & |\xi(\theta + \varepsilon u(t, \theta, h_t)) + \frac{1}{2} \{ A(\theta + \varepsilon u(t, \theta, h_t)) (h_t + \\ & + \varepsilon v(t, \theta, h_t)) + A^*(\theta + \varepsilon u(t, \theta, h_t)) (h_t^* + \varepsilon v^*(t, \theta, h_t)) \} - \\ & - \xi(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f)) - \frac{1}{2} \{ A(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f)) (f(t, \theta, \varepsilon) + \varepsilon v(t, \theta, f)) + \\ & + A^*(\theta + \varepsilon u(t, \theta, f)) (f^*(t, \theta, \varepsilon) + \varepsilon v^*(t, \theta, f)) \}| \leq \\ & \leq \lambda(\varepsilon, \sigma_0) |h_t - f(t, \theta(t))| \leq C |h_{t_0} - f(t_0, \theta(t_0))| e^{-\gamma(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание, что  $h_{t_0}$  и  $f(t_0, \theta(t_0))$  принадлежат области  $U_{\theta_0}$ , окончательно получаем:

$$|x(t) - f(t, \theta(t))| \leq C_1(\varepsilon) e^{-\varepsilon \gamma (t-t_0)}.$$

Неравенство (28.96) непосредственно следует из установленного в следствии 2 к лемме III неравенства (28.108), где вместо переменной  $g$  положено  $\theta$ .

Утверждения 5 и 6 теоремы непосредственно следуют из леммы III и ее следствия 2.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Заметим, что все сформулированные выше результаты непосредственно переносятся на тот случай, когда основное уравнение имеет несколько более общую форму

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \quad (29.34)$$

а в уравнении первого приближения, соответствующем рассматриваемому уравнению (29.34), положено

$$X_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, 0) dt. \quad (29.35)$$

При этом достаточно, чтобы условия, наложенные на  $X(t, x)$ , выполнялись для функции  $X(t, x, \varepsilon)$  равномерно по отношению к  $\varepsilon$  в некотором интервале  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ .

Действительно, в таком случае уравнение (29.34) теми же заменами переменных приводится к системе вида (27.105) со всеми указанными свойствами.

### § 30. Периодические и почти периодические решения

В настоящем параграфе рассмотрим важный частный случай, когда функции (29.20)  $f(t, \theta)$  и правые части уравнений  $F(t, \theta)$  являются периодическими функциями времени  $t$  с некоторым периодом  $T$  (не зависящим от  $\theta$ ) и число производных  $m$  взято равным двум.

В соответствии со свойством 2) и 3) теоремы II § 29 такой «случай периодичности» будет иметь место, например, когда функции  $X(t, x)$  обладают по отношению к  $t$  этим периодом  $T$ .

В этом случае вместо системы (27.105):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= G(\varepsilon) + P(t, g, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + Q(t, g, h, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (30.1)$$

выбираем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= \omega + \Pi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{d\tau} &= Hh + \Gamma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g, h, \varepsilon\right), \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

и поэтому в неравенстве (29.22) теоремы II получаем:

$$\Omega(\varepsilon) = \omega. \quad (30.3)$$

«Случай периодичности» функций  $f(t, \theta)$  и  $F(t, \theta)$  также имеет место, если в уравнениях (27.47)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon W(t, \varphi, b), \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon Hb + \varepsilon B(t, \varphi, b), \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

функции  $W(t, \varphi, b)$ ,  $B(t, \varphi, b)$ , как об этом указывалось на стр. 351, имеют вид (27.103), т. е.

$$\left. \begin{aligned} W(t, \varphi, b) &= \bar{W}(t, \varphi + vt, b), \\ B(t, \varphi, b) &= \bar{B}(t, \varphi + vt, b), \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

где  $\bar{W}(t, \varphi, b)$ ,  $\bar{B}(t, \varphi, b)$  обладают по отношению к  $t$  периодом  $T$ .

Тогда в качестве системы (30.1) принимается система уравнений (27.104):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega + \frac{v}{\varepsilon} + \bar{\Pi}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \\ \frac{dh}{dt} &= Hh + \bar{\Gamma}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \vartheta, h, \varepsilon\right), \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

правые части которых являются периодическими функциями независимой переменной  $\tau$ .

В данном случае в неравенстве (29.22) теоремы II будет:

$$\Omega(\varepsilon) = \omega + \frac{v}{\varepsilon}. \quad (30.7)$$

Рассматриваемый «случай периодичности» функций  $f(t, \theta)$  и  $F(t, \theta)$  представляет особый интерес, потому что здесь, опираясь на классические результаты Пуанкаре, дополненные Данжуа, можно провести анализ структуры решений, лежащих на многообразии  $S_t$ .

Этим и займемся в настоящем параграфе.

Возьмем уравнение:

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta), \quad (30.8)$$

и будем рассматривать его решение  $\theta(t)$  как функцию от начальных значений  $t_0$ ,  $\theta_0 = \theta(t_0)$  и разности  $t - t_0$ :

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \Phi(t - t_0, t_0, \theta(t_0)). \quad (30.9)$$

Заметим теперь, что в силу свойства периодичности правой части уравнения (30.8), т. е. функции  $F(t, \theta)$  по  $t$  и  $\theta$  с периодами соответственно  $T$  и  $2\pi$ , функция  $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$  будет периодической по отношению к  $t_0$ ,  $\theta_0$  соответственно с периодами  $T$  и  $2\pi$ .

Пусть теперь

$$\theta_n = \theta(t_0 + nT).$$

Тогда, полагая в (30.9) вместо  $t$  и  $t_0$  соответственно  $t_0 + (n+1)T$  и  $t_0 + nT$ , получаем:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Phi(T, t_0 + nT, \theta_n)$$

или, обозначая

$$\Phi(\theta_n) = \Phi(T, t_0, \theta_n)$$

и учитывая, что  $\Phi(T, t_0, \theta_n)$  – функция периодическая по  $t$  с периодом  $T$ , имеем:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Phi(\theta_n), \quad (30.10)$$

где  $\Phi(\theta)$  является периодической функцией  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Ввиду того, что в условиях теоремы II § 29 мы приняли  $m = 2$ , функция  $\Phi(\theta)$  будет обладать непрерывными производными первого и второго порядков.

Далее, из уравнения (30.8), учитывая неравенство (29.23):

$$|F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \leq \eta^*(\varepsilon) |\theta' - \theta''|,$$

следует, что

$$\left| \frac{d\theta_{n+1}}{dt} - \frac{d\theta_n}{dt} \right| \leq \varepsilon \eta^*(\varepsilon) |\theta_{n+1} - \theta_n|,$$

откуда, учитывая (30.10), непосредственно получаем:

$$|\Phi'(\theta)| \leq \varepsilon \rho(\varepsilon), \quad (30.11)$$

где  $\rho(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

При рассматриваемых достаточно малых значениях  $\varepsilon$ , для которых

$$\varepsilon \rho(\varepsilon) < 1,$$

согласно (30.11) имеем:

$$1 + \Phi'(\theta) > 0. \quad (30.12)$$

Таким образом, функция

$$F(\theta) = \theta + \Phi(\theta) \quad (30.13)$$

в силу (30.12) является монотонно возрастающей и обладает свойством периодичности «второго рода»:

$$F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi.$$

Поэтому преобразование

$$\theta \rightarrow F(\theta) \quad (30.14)$$

может рассматриваться как взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение окружности на саму себя.

Благодаря (30.10) видим, что последовательные значения решения уравнения (30.8) в точках  $t = t_0 + nT$  получаются итерацией преобразования (30.14), исходя из начального значения  $\theta_0$ .

Итак, в дальнейшем вместо уравнения (30.8) и его решений будем рассматривать эквивалентное ему итерационное уравнение (30.10) и его решения.

Заметим теперь, что итерации преобразований рассматриваемого здесь типа были предметом исследований Пуанкаре и Данжуа \*), в которых было установлено следующее:

1) Для решений  $\theta_n$  итерационного уравнения (30.10), т. е. согласно обозначению (30.13) уравнения

$$\theta_{n+1} = F(\theta_n), \quad (30.15)$$

\*) A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journ. de Math., 11 (1932).

существует предел

$$\bar{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{2\pi n}, \quad (30.16)$$

не зависящий от  $\theta_0$ .

2) Если  $\bar{\nu}$  иррационально, то общее решение итерационного уравнения (30.15) имеет вид

$$\theta_n = 2\pi\bar{\nu}n + \psi + E(2\pi\bar{\nu}n + \psi), \quad (30.17)$$

где  $\psi$  — произвольная постоянная, а  $E(\varphi)$  — непрерывная периодическая функция с периодом  $2\pi$ . Выражение  $\varphi + E(\varphi)$  является монотонно возрастающей функцией, не остающейся постоянной ни в каком, сколь угодно малом интервале.

3) Если  $\bar{\nu}$  рационально:

$$\bar{\nu} = \frac{r}{s},$$

где  $r, s$  — взаимно простые числа, то рассматриваемое итерационное уравнение (30.15) имеет периодические решения, для которых выполняются соотношения:

$$\theta_{n+s} - \theta_n = 2\pi r, \quad (30.18)$$

причем любые решения  $\theta_n$  при неограниченном возрастании  $n$  приближаются к одному из таких периодических решений.

Кроме того, если  $\theta_m$  будет каким-либо решением рассматриваемого уравнения (30.15), исходящим из начального значения  $\theta_0$ , лежащего внутри интервала  $(0, 2\pi)$ , то для него можно указать такие постоянные  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ , удовлетворяющие неравенствам:

$$\alpha_m > 0, \beta_m > 0, \alpha_m + \beta_m < 2\pi, \quad (30.19)$$

что

$$-\alpha_m \leq \theta_{m+s} - 2\pi mr \leq \beta_m. \quad (30.20)$$

Установим теперь ряд следствий из указанных результатов Пуанкаре — Данжуа.

Рассмотрим сначала случай иррационального  $\bar{\nu}$ .

Заменяя в (30.19)  $t_0$  на  $t_0 + nT$  и учитывая периодичность функции  $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$  по  $t_0$ , получаем:

$$\theta(t) = \theta_n + \Phi(t - t_0 - nT, T_0, \theta_n),$$

откуда в силу (30.17) имеем:

$$\theta(t) = 2\pi\bar{\nu}n + \psi + E(2\pi\bar{\nu}n + \psi) + \Phi(t - t_0 - nT, t_0, 2\pi\bar{\nu}n + \psi + E(2\pi\bar{\nu}n + \psi)). \quad (30.21)$$

Введем для сокращения следующее обозначение:

$$-\xi + E(\varphi) + \Phi\left(\frac{T}{2\pi\bar{\nu}}\xi, t_0, \varphi + E(\varphi)\right) = f(\xi, \varphi).$$

Тогда, полагая в (30.21)

$$\xi = 2\pi\bar{\nu}\frac{t - t_0 - nT}{T},$$

получим:

$$\theta(t) = 2\pi \frac{\bar{v}(t-t_0)}{T} + \psi + f\left(2\pi \frac{t-t_0-nT}{T}, 2\pi \bar{v}n + \psi\right), \quad (30.22)$$

так как

$$2\pi \frac{t-t_0}{T} = \xi + 2\pi \bar{v}n.$$

Заметим, кстати, что введенная функция  $f(\xi, \varphi)$  непрерывна и обладает по отношению к  $\varphi$  периодом  $2\pi$ , так как  $E(\varphi)$  и  $\Phi(\tau, t_0, \theta_0)$  — периодические по  $\varphi$  и  $\theta_0$  с периодом  $2\pi$ .

Далее, так как соотношение (30.22) справедливо при любом  $n$ , то можем написать следующее тождество:

$$\begin{aligned} f\left(2\pi \frac{t-t_0-nT}{T} - 2\pi \bar{v}, 2\pi \bar{v}n + \psi + 2\pi \bar{v}\right) &= \\ &= f\left(2\pi \frac{t-t_0-nT}{T}, 2\pi \bar{v}n + \psi\right). \end{aligned} \quad (30.23)$$

Величина  $t$  здесь также произвольна. Введем вместо  $t$  новую независимую переменную  $u$  по формуле

$$t - t_0 - nT = \frac{T}{2\pi \bar{v}} u.$$

Тогда тождество (30.23), очевидно, можно представить в виде

$$f(u - 2\pi \bar{v}, 2\pi \bar{v}n + \psi + 2\pi \bar{v}) = f(u, 2\pi \bar{v}n + \psi). \quad (30.24)$$

Поскольку числа  $2\pi \bar{v}n$  образуют на окружности всюду плотное множество, то в силу непрерывности из (30.24) можно заключить, что для любых  $\varphi$  будет выполняться соотношение

$$f(u - 2\pi \bar{v}, \varphi + 2\pi \bar{v}) = f(u, \varphi). \quad (30.25)$$

Заметив это, построим функцию

$$f\left(2\pi \bar{v}R\left(\frac{u}{2\pi}\right), \varphi - 2\pi \bar{v}R\left(\frac{u}{2\pi}\right)\right) = \bar{f}(u, \varphi), \quad (30.26)$$

где  $R(a)$  — дробная часть вещественного числа  $a$ . Так как  $R\left(\frac{u}{2\pi}\right)$  является периодической функцией  $u$  с периодом  $2\pi$  и притом непрерывна, кроме точек  $u = 2\pi m$  ( $m$  — целое), где она терпит разрыв, равный единице, то построенная функция  $\bar{f}(u, \varphi)$  будет периодической функцией по отношению к  $\varphi$  и  $u$ , обладающей периодом  $2\pi$  и, кроме того, непрерывной, так как ввиду тождества (30.25) свойство непрерывности сохраняется также в точках разрыва функции  $R\left(\frac{u}{2\pi}\right)$ .

Положим теперь в правой части формулы (30.22):

$$n = \frac{t-t_0}{T} - R\left(\frac{t-t_0}{T}\right).$$

Тогда формулу (30.22), учитывая соотношение (30.26), можно представить в виде:

$$\theta(t) = 2\pi \frac{\bar{v}(t-t_0)}{T} + \psi + f\left(2\pi \frac{t-t_0}{T}, 2\pi \bar{v} \frac{t-t_0}{T} + \psi\right). \quad (30.27)$$

Подставляя это выражение в (29.20)

$$x = f(t, \theta(t)), \quad (30.28)$$

убеждаемся, что решения рассматриваемого основного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

лежащие на интегральном многообразии  $S_t$ , имеют в рассматриваемом случае иррационального  $\bar{v}$  следующий вид:

$$x(t) = \Phi(\alpha_e t, \alpha_p t + \psi) \left( \alpha_e = \frac{2\pi}{T}, \alpha_p = \frac{2\pi\bar{v}}{T}, \psi = \text{const} \right), \quad (30.29)$$

где  $\Phi(\varphi, \vartheta)$  — непрерывная функция угловых переменных  $\varphi$  и  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ .

Итак, рассматриваемые решения уравнения (29.16), лежащие на многообразии  $S_t$ , оказываются квазипериодическими функциями и обладают двумя основными частотами — «внешней» частотой  $\alpha_e = \frac{2\pi}{T}$  и «собственной» частотой  $\alpha_p = \frac{2\pi\bar{v}}{T}$ .

Заметим еще, что согласно (30.27) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(t)}{t} = \frac{2\pi\bar{v}}{T},$$

и поэтому благодаря неравенству (29.22) и уравнению (30.8) получим:

$$|\alpha_p - \Omega(\varepsilon)| \ll \varepsilon \delta^*(\varepsilon). \quad (30.30)$$

Таким образом, в случае иррационального  $\bar{v}$   $\Omega(\varepsilon)$  является асимптотическим приближением для собственной частоты  $\alpha_p = \frac{2\pi\bar{v}}{T}$ .

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда число  $\bar{v}$  рациональное:

$$\bar{v} = \frac{r}{s},$$

где  $r$  и  $s$  — взаимно простые числа.

Тогда ввиду приведенного выше результата Пуанкаре — Данжуа на интегральном многообразии  $S_t$  имеются периодические решения уравнения (30.8) с периодом  $sT$ , причем любое решение, принадлежащее  $S_t$ , приближается к одному из этих периодических решений с периодом  $sT$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Заметим, между прочим, что, поскольку здесь у периодических решений частоты будут кратными  $\frac{2\pi}{sT}$ , мы можем представить их линейными комбинациями частот

$$\alpha_e = \frac{2\pi}{T}; \alpha_p = \frac{2\pi}{sT} r = \frac{2\pi}{T} \bar{v}. \quad (30.31)$$

Таким образом, и в данном случае рационального значения числа  $\bar{v}$  стационарные решения уравнения (29.16) (периодические решения,

лежащие на многообразии  $S_t$ ) можно формально представить как функции, обладающие основными частотами  $\alpha_e$  и  $\alpha_p$ .

Перейдем теперь к рассмотрению решений, не лежащих на многообразии  $S_t$ , ограничиваясь при этом тем случаем, когда все  $n-1$  характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части.

В этом случае покажем, что любое решение основного уравнения (29.16), проходящее при  $t = t_0$  через какую-либо точку области  $U_{t_0}$ , приближается при  $t \rightarrow \infty$  к одному из стационарных решений, т. е. к квазипериодическому решению в случае иррационального  $\gamma$  или к периодическому в случае рационального  $\gamma$ .

Для этого, как видно из неравенств (29.25), (29.26),

$$\begin{aligned} |x(t) - f(t, \theta(t))| &\leq C_1(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}, \\ \left| \frac{d\theta(t)}{dt} - \varepsilon F(t, \theta(t)) \right| &\leq C_2(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma(t-t_0)}, \end{aligned}$$

достаточно доказать, что если какая-либо непрерывная и дифференцируемая функция  $\theta(t)$  в интервале  $(t_0, \infty)$  удовлетворяет неравенству (29.26), то

$$\theta(t) - \varphi(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \quad (30.32)$$

где  $\varphi(t)$  является решением уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon F(t, \varphi). \quad (30.33)$$

В свою очередь для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что для любой последовательности  $\theta_n$ , для которой

$$|\theta_{n+1} - F(\theta_n)| \leq Q(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma_0 n}, \quad \gamma_0 = \gamma T, \quad (30.34)$$

будет иметь место соотношение

$$\theta_n - \varphi_n \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \quad (30.35)$$

где  $\varphi_n$  удовлетворяет итерационному уравнению

$$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n). \quad (30.36)$$

Итак, для завершения доказательства нашего утверждения о стремлении любого решения основного уравнения (29.16), проходящего при  $t = t_0$  через какую-либо точку области  $U_{t_0}$ , к одному из стационарных решений остается рассмотреть последовательность  $\theta_n$ , удовлетворяющую неравенству (30.34), и установить для нее справедливость предельного соотношения (30.35).

Этим сейчас мы и будем заниматься.

Рассмотрим вначале следующие выражения:

$$\begin{aligned} \theta_{m+1} + K e^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} - F(\theta_m + K e^{-\varepsilon\gamma_0 m}) &= \theta_{m+1} - F(\theta_m) + \\ &\quad + K e^{-\varepsilon\gamma_0 m} (e^{-\varepsilon\gamma_0} - \tilde{F}'_0), \\ \theta_{m+1} - K e^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} - F(\theta_m - K e^{-\varepsilon\gamma_0 m}) &= \theta_{m+1} - F(\theta_m) - \\ &\quad - K e^{-\varepsilon\gamma_0 m} (e^{-\varepsilon\gamma_0} - \tilde{F}'_0), \end{aligned} \quad (30.37)$$

где  $K$  — некоторая постоянная, вообще говоря, малая, выбор которой будет нами сделан ниже.

В силу неравенства (30.11) и уравнения (30.13) имеем:

$$\begin{aligned} F'_\theta(\theta) &= 1 + \Phi'(\theta), \\ |\Phi'(\theta)| &\leq \varepsilon_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

откуда находим:

$$1 - \varepsilon_0(\varepsilon) \leq F'_\theta(\theta) \leq 1 + \varepsilon_0(\varepsilon). \quad (30.38)$$

Поэтому, учитывая неравенства (30.38) и (30.34), из соотношения (30.37) получаем следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{m+1} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} &< F(\theta_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}) + Q(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma_0 m} - \\ &\quad - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}(1 - \varepsilon_0(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}), \\ \theta_{m+1} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(m+1)} &> F(\theta_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}) - Q(\varepsilon) e^{-\varepsilon\gamma_0 m} + \\ &\quad + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}(1 - \varepsilon_0(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}). \end{aligned} \right\} \quad (30.39)$$

Пусть теперь число  $\varepsilon_0$  взято столь малым, что для любого положительного  $\varepsilon$  меньшего  $\varepsilon_0$  выполняется следующее соотношение:

$$1 - \varepsilon_0(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0} > 0. \quad (30.40)$$

Тогда, полагая, что постоянная  $K$  определена выражением

$$K = \frac{Q(\varepsilon)}{1 - \varepsilon_0(\varepsilon) - e^{-\varepsilon\gamma_0}}, \quad (30.41)$$

и вводя обозначения

$$\psi'_m = \theta_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \quad \psi''_m = \theta_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \quad (30.42)$$

из неравенств (30.39) находим:

$$\begin{aligned} \psi'_{m+1} &< F(\psi'_m), \\ \psi''_{m+1} &> F(\psi''_m). \end{aligned} \quad (30.43)$$

Рассмотрим теперь системы чисел

$$\varphi'_{m,n}, \quad \varphi''_{m,n}, \quad (30.44)$$

являющиеся по отношению к индексу  $m$  решениями итерационного уравнения (30.36):

$$\varphi_{m+1} = F(\varphi_m)$$

при начальных условиях

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{m,n} &= \theta_n + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n} = \psi'_n, \\ \varphi''_{m,n} &= \theta_n - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n} = \psi''_n \end{aligned} \right\} \quad (m=n). \quad (30.45)$$

Вследствие неравенств (30.43), принимая во внимание монотонное возрастание функции  $F(\theta)$ , заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} \psi'_m &\leq \varphi'_{m,n}, \\ \psi''_m &\geq \varphi''_{m,n} \end{aligned} \right\} \quad (m=n, n+1, n+2, \dots). \quad (30.46)$$

Согласно (30.45) имеем:

$$\begin{aligned}\theta_m &= \phi'_m - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}, \\ \theta_m &= \phi''_m + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m},\end{aligned}$$

откуда, учитывая (30.46), получаем следующее неравенство:

$$\phi''_{m,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \leq \theta_m \leq \phi'_{m,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}. \quad (30.47)$$

Рассмотрим вначале случай иррационального  $\bar{\nu}$ . В этом случае на основании второго свойства Пуанкаре — Данжуа (стр. 389)  $\phi'_{m,n}$  и  $\phi''_{m,n}$  как решения итерационного уравнения (30.36) могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}\phi'_{m,n} &= 2\pi\bar{\nu}m + \xi_n + E(2\pi\bar{\nu}m + \xi_n), \\ \phi''_{m,n} &= 2\pi\bar{\nu}m + \eta_n + E(2\pi\bar{\nu}m + \eta_n),\end{aligned}\right\} \quad (30.48)$$

где  $\xi_n$  и  $\eta_n$  — произвольные постоянные.

Принимая во внимание (30.47) (откуда следует, что  $\phi'_{m,n} < \phi''_{m,n}$ ) и учитывая, что  $\varphi + E(\varphi)$  является монотонно возрастающей функцией, не остающейся постоянной ни в каком сколь угодно малом интервале, можем утверждать, что стоящие в соотношении (30.48) постоянные  $\xi_n$  и  $\eta_n$  удовлетворяют неравенству

$$\xi_n > \eta_n. \quad (30.49)$$

Полагая в неравенствах (30.47)  $m = n + 1$  и учитывая (30.45), имеем:

$$\left. \begin{aligned}\phi'_{n+1,n} &\geq \theta_{n+1} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+1)} = \phi'_{n+1,n+1}, \\ \phi''_{n+1,n} &\leq \theta_{n+1} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+1)} = \phi''_{n+1,n+1}.\end{aligned}\right\} \quad (30.50)$$

Сравнивая (30.50) и (30.48), находим:

$$\begin{aligned}\xi_n + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \xi_n) &\geq \xi_{n+1} + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \xi_{n+1}), \\ \eta_n + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \eta_n) &\leq \eta_{n+1} + E(2\pi(\bar{\nu}n + \bar{\nu}) + \eta_{n+1}),\end{aligned}$$

и потому ввиду монотонного возрастания функции  $\varphi + E(\varphi)$  видим, что

$$\left. \begin{aligned}\xi_{n+1} &\leq \xi_n, \\ \eta_{n+1} &\geq \eta_n.\end{aligned}\right\} \quad (30.51)$$

С другой стороны, из равенств (30.48) и (30.45) следует:

$$\xi_n + E(2\pi\bar{\nu}n + \xi_n) - \eta_n - E(2\pi\bar{\nu}n + \eta_n) = 2Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

откуда

$$\xi_n - \eta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (30.52)$$

Только что установленные соотношения (30.49), (30.51), (30.52) показывают, что последовательности  $\xi_n$  и  $\eta_n$ , первая убывающая, а вторая — возрастающая, стремятся к некоторому общему пределу  $\bar{\phi}$ .

С другой стороны, отбрасывая в неравенствах (30.47) слагаемое  $Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m}$  и учитывая соотношение (30.48), имеем:

$$2\pi\bar{\nu}m + \xi_m + E(2\pi\bar{\nu}m + \xi_m) > \theta_m > 2\pi\bar{\nu}m + \eta_m + E(2\pi\bar{\nu}m + \eta_m), \quad (30.53)$$

откуда при  $m \rightarrow \infty$  находим:

$$\theta_m - \{(2\pi\bar{\nu}m + \bar{\phi}) + E(2\pi\bar{\nu}m + \bar{\phi})\} \rightarrow 0,$$

или

$$\theta_m - \varphi_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (30.54)$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению случая рационального  $\bar{v}$ :

$$\bar{v} = \frac{r}{s}, \quad (30.55)$$

где  $r$  и  $s$  — взаимно простые числа.

Введем функцию, получающуюся в результате  $s$ -кратного применения преобразования  $F$ :

$$\Phi_1(\varphi) = F(\dots F(\varphi) \dots) - 2\pi r, \quad (30.56)$$

и заметим, что она будет непрерывно и монотонно возрастающей функцией  $\varphi$ .

Так как  $F(\varphi)$  обладает свойством периодичности «второго рода» с периодом  $2\pi$ , то, следовательно, разность

$$\Phi_1(\varphi) - \varphi \quad (30.57)$$

будет периодической с периодом  $2\pi$  по  $\varphi$ .

Ввиду того, что в рассматриваемом случае рационального  $\bar{v}$  ( $\bar{v} = \frac{r}{s}$ ) на основании свойства 3), установленного Пуанкаре — Данжуа, периодические решения итерационного уравнения (30.36)

$$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$$

удовлетворяют соотношению

$$\varphi_{n+s} - \varphi_n = 2\pi r, \quad (30.58)$$

то для них

$$\varphi_{n+s} = F(\dots F(F(\varphi)) \dots),$$

или на основании (30.56)

$$\varphi_{n+s} - 2\pi r = \Phi_1(\varphi_n), \quad (30.59)$$

откуда, учитывая (30.58) и полагая  $n = ms$ , находим:

$$\varphi_{ms} = \Phi_1(\varphi_{ms}).$$

Таким образом, принимая в качестве начального значения  $\varphi_0$  один из корней уравнения

$$\varphi = \Phi_1(\varphi), \quad (30.60)$$

получаем решение итерационного уравнения (30.36)  $\varphi_{ms}$ , исходящее из начального значения  $\varphi_0$ , которое согласно (30.58) можем записать в виде

$$\varphi_{ms} = \varphi_0 + 2\pi rm. \quad (30.61)$$

Однако имеем:

$$\varphi_{ms+1} - F(\varphi_{ms}) = 0. \quad (30.62)$$

Согласно соотношению (30.34) имеем также:

$$\theta_{ms+1} - F(\theta_{ms}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (30.63)$$

Поэтому в данном случае рационального  $\bar{\psi}$  для того, чтобы доказать соотношение

$$\theta_n - \varphi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

нам надо показать, что

$$\theta_{ms} - \varphi_{ms} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \quad (30.64)$$

или, что непосредственно вытекает из (30.62) и (30.63),

$$\theta_{ms+1} - \varphi_{ms+1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

или, наконец, вообще

$$\theta_{ms+k} - \varphi_{ms+k} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, s-1$ .

Учитывая (30.61), соотношение (30.64) можем записать в виде

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \rightarrow \varphi_0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (30.65)$$

где  $\varphi_0$  — один из корней уравнения (30.60).

Поэтому для доказательства нашего утверждения о стремлении всякого решения основного уравнения (29.16), проходящего при  $t = t_0$  через какую-либо точку области  $U_{\varphi_0}$  к одному из стационарных решений, нам в случае рационального  $\bar{\psi}$  остается установить справедливость предельного перехода (30.65).

Итак, приступим к доказательству предельного соотношения (30.65).

Возьмем какое-либо решение  $\varphi_m$  итерационного уравнения (30.36), исходящее из начального значения  $\varphi_0$ , произвольно фиксированного в интервале  $(0, 2\pi)$ .

Учитывая, что согласно (30.61)

$$\varphi_0 = \varphi_{ms} - 2\pi rm,$$

положим для сокращения

$$\bar{\varphi}_m = \varphi_{ms} - 2\pi rm.$$

Тогда согласно свойству 3), установленному Пуанкаре — Данжуа (см. стр. 389), имеем:

$$-\alpha_m < \bar{\varphi}_m < \beta_m, \quad (30.66)$$

где

$$\alpha_m > 0, \quad \beta_m > 0, \quad \alpha_m + \beta_m < 2\pi.$$

С другой стороны, согласно (30.19) и (30.59) можем написать:

$$\bar{\varphi}_{m+1} = \varphi_{ms+s} - 2\pi r - 2\pi mr = \Phi_1(\varphi_{ms}) - 2\pi mr.$$

Но так как

$$\varphi_{ms} = \bar{\varphi}_m + 2\pi mr,$$

то, учитывая, что  $\Phi_1(\varphi)$  обладает свойством периодичности второго рода, имеем:

$$\bar{\varphi}_{m+1} = \Phi_1(\bar{\varphi}_m), \quad (30.67)$$

и потому ввиду монотонного возрастания функции  $\Phi_1(\varphi)$  в случае, если рассматриваемое решение итерационного уравнения (30.36)  $\varphi_m$  не является периодическим, т. е. если числа  $\bar{\varphi}_m$  не постоянны по отношению

к индексу  $m$ , последовательность

$$\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m, \dots$$

будет, монотонно убывая или возрастаю, стремиться к некоторому пределу, являющемуся корнем уравнения (30.60).

Установим теперь следующие леммы.

**Лемма а).** Последовательность

$$\bar{\varphi}_m (m = 0, 1, 2, \dots)$$

никогда не может «перескочить» через какой-либо корень уравнения (30.60)

$$\varphi = \Phi_1(\varphi),$$

т. е. не существует такого целого  $m_0$ , что

$$\bar{\varphi}_{m_0} < \varphi_0 < \bar{\varphi}_{m_0+1} \quad (30.68)$$

или

$$\bar{\varphi}_{m_0} > \varphi_0 > \bar{\varphi}_{m_0+1}. \quad (30.69)$$

**Доказательство.** Допустим, что имеет место неравенство (30.68). Тогда вследствие монотонного возрастания функции  $\Phi_1(\varphi)$  имеем:

$$\Phi_1(\bar{\varphi}_{m_0}) < \Phi_1(\varphi_0),$$

откуда, учитывая соотношение (30.67), получаем:

$$\bar{\varphi}_{m_0+1} < \varphi_0,$$

что противоречит (30.68).

Аналогично доказывается также невозможность неравенства (30.69).

**Лемма б).** Если последовательности

$$\bar{\varphi}'_m, \bar{\varphi}''_m (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (30.70)$$

соответствующие решениям итерационного уравнения (30.36), стремятся к различным корням уравнения (30.60), то между величинами

$$\bar{\varphi}'_m, \bar{\varphi}''_m$$

всегда лежит, по крайней мере, один корень этого уравнения (30.60).

**Доказательство.** Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что здесь могут представиться два случая: 1) когда обе рассматриваемые последовательности одновременно возрастают или убывают и 2) когда одна из них возрастаёт, а другая убывает.

Рассмотрим вначале случай одновременного возрастания. Пусть, например, для определенности

$$\bar{\varphi}'_0 > \bar{\varphi}''_0.$$

Тогда, так как обе последовательности возрастают и стремятся к различным корням уравнения (30.60), то, очевидно, что для всех  $m$

$$\bar{\varphi}'_m > \bar{\varphi}''_m.$$

Переходя к пределу, получим

$$\varphi' > \varphi'',$$

где  $\varphi'$  и  $\varphi''$  — корни уравнения (30.60), являющиеся соответственно пределами последовательностей  $\bar{\varphi}_m'$ ,  $\bar{\varphi}_m''$ .

Благодаря монотонному возрастанию последовательности  $\bar{\varphi}_m''$ , очевидно, получим:

$$\bar{\varphi}_m'' < \varphi''. \quad (30.71)$$

Так как последовательность  $\bar{\varphi}_m'$  на основании леммы а) не может «перепрыгнуть» через  $\varphi''$ , то для всех  $m$  имеем:

$$\bar{\varphi}_m' > \varphi''. \quad (30.72)$$

Из неравенств (30.71) и (30.72) получаем:

$$\bar{\varphi}_m'' < \varphi'' < \bar{\varphi}_m',$$

что и доказывает в рассматриваемом случае справедливость нашей леммы.

Аналогичные рассуждения имеют место и в случае одновременного убывания последовательностей (30.70).

Пусть теперь одна из последовательностей (30.70) убывает, а другая возрастает.

В этом случае знаки следующих двух выражений:

$$\bar{\varphi}_{m+1}' - \bar{\varphi}_m' = \Phi_1(\bar{\varphi}_m') - \bar{\varphi}_m',$$

$$\bar{\varphi}_{m+1}'' - \bar{\varphi}_m'' = \Phi_1(\bar{\varphi}_m'') - \bar{\varphi}_m'',$$

различны (так как одна последовательность возрастает, а другая убывает).

Поэтому на основании непрерывности уравнение (30.60)

$$\Phi_1(\varphi) - \varphi = 0$$

имеет, по крайней мере, один корень в интервале

$$[\bar{\varphi}_m', \bar{\varphi}_m''].$$

Итак, лемма б) полностью доказана.

Возвратимся теперь к рассмотрению неравенств (30.47):

$$\varphi_{m,n}'' + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \leq \theta_m \leq \varphi_{n,m} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 m} \quad (m = n, n+1, n+2, \dots).$$

Полагая для сокращения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ms, ns}' - 2\pi rm &= \bar{\varphi}_{m,n}', \\ \varphi_{ms, ns}'' - 2\pi rm &= \bar{\varphi}_{m,n}'', \\ \theta_{ms} - 2\pi rm &= \bar{\theta}_m, \end{aligned} \right\} \quad (30.73)$$

заменив в (30.47)  $m$  и  $n$  соответственно на  $ms$  и  $ns$  и вычитая из всех частей неравенства  $2\pi rm$ , получаем следующие неравенства:

$$\bar{\varphi}_{m,n}'' + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ms} \leq \bar{\theta}_m \leq \bar{\varphi}_{m,n}' - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ms} \quad (m = n, n+1, n+2, \dots), \quad (30.74)$$

причем, полагая в (30.45)  $m = n$  и учитывая (30.73), находим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_{n,n}' &= \bar{\theta}_n + Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ns}, \\ \bar{\varphi}_{n,n}'' &= \bar{\theta}_n - Ke^{-\varepsilon\gamma_0 ns}. \end{aligned} \right\} \quad (30.75)$$

Если теперь для какого-либо фиксированного  $n$  при  $m \rightarrow \infty$  последовательности

$$\bar{\varphi}'_{m,n}, \bar{\varphi}''_{m,n} \quad (30.76)$$

стремятся к одному и тому же корню  $\varphi_0$  уравнения (30.60), то из (30.74) следует, что

$$\bar{\theta}_m \rightarrow \varphi_0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

или учитывая третье обозначение (30.73), имеем:

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \rightarrow \varphi_0, \quad m \rightarrow \infty,$$

что и доказывает наше утверждение.

Если же, наоборот, при любом  $n$  последовательности (30.76) при  $m \rightarrow \infty$  стремятся к различным корням уравнения (30.60), то на основании леммы б) в интервалах

$$[l_n] = [\bar{\varphi}'_{n,n}, \bar{\varphi}''_{n,n}]$$

всегда лежит, по крайней мере, один корень уравнения (30.60).

Легко доказать, однако, что при произвольном положительном  $k$  интервалы

$$[l_{n+k}] = [\bar{\varphi}'_{n+k,n+k}, \bar{\varphi}''_{n+k,n+k}], \quad l_n = [\bar{\varphi}'_{n,n}, \bar{\varphi}''_{n,n}]$$

имеют общую часть.

В самом деле, если бы эти интервалы не имели общей части, то выполнялось бы одно из следующих двух соотношений:

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}''_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}'_{n,n} > \bar{\varphi}''_{n,n} \quad (30.77)$$

или

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n+k} < \bar{\varphi}''_{n+k,n+k} < \bar{\varphi}'_{n,n} < \bar{\varphi}''_{n,n}. \quad (30.78)$$

Допустим сначала, что выполняется соотношение (30.77). Тогда, полагая в (30.74)  $m = n + k$ , имеем:

$$\bar{\theta}_{n+k,n} - Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+k)s} \geq \bar{\theta}_{n+k,n} \geq \bar{\varphi}''_{n+k,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+k)s}. \quad (30.79)$$

Учитывая (30.75), можем написать:

$$\bar{\theta}_{n+k,n} + Ke^{-\varepsilon\gamma_0(n+k)s} = \bar{\varphi}'_{n+k,n+k},$$

и потому из (30.77) и (30.78) находим:

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n} \geq \bar{\varphi}'_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}''_{n+k,n+k} > \bar{\varphi}''_{n,n}. \quad (30.80)$$

Обозначим через  $\alpha_{n+k}^*$  корень уравнения (30.60), лежащий в интервале  $[l_{n+k}] = [\bar{\varphi}'_{n+k,n+k}, \bar{\varphi}''_{n+k,n+k}]$ . На основании (30.80) этот корень  $\alpha_{n+k}^*$  удовлетворяет также соотношению

$$\bar{\varphi}'_{n+k,n} > \alpha_{n+k}^* > \bar{\varphi}''_{n,n},$$

и таким образом, мы видим, что последовательность

$$\bar{\varphi}'_{n,n}, \bar{\varphi}'_{n+1,n}, \bar{\varphi}'_{n+2,n}, \dots, \bar{\varphi}'_{n+k,n}$$

«перепрыгивает» через корень уравнения (30.60), что противоречит лемме а).

Аналогично доказывается невозможность неравенства (30.78).

Итак, интервалы

$$[l_{n+k}, l_n]$$

имеют общие части. Так как, с другой стороны, согласно (30.75) длина интервала  $l_n$  равна  $2Ke^{-\varepsilon\gamma_0 n s}$  и в каждом из этих интервалов находятся  $\bar{\theta}_n$  и корни уравнения (30.60), то убеждаемся, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\bar{\theta}_n \rightarrow \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — корень уравнения (30.60), или согласно обозначению (30.73)

$$\theta_{ms} - 2\pi rm \rightarrow \varphi_0, m \rightarrow \infty,$$

что и требовалось доказать для случая рационального  $\nu$ .

Резюмируем теперь полученные результаты в форме следующей теоремы.

**Теорема III.** Пусть для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (30.81)$$

выполняются условия а) и б) теоремы II § 29 (см. стр. 382), а также условие в) при  $m = 2$ .

Кроме того, пусть выполняется одно из следующих двух условий:

а)  $X(t, x)$  — периодическая функция по  $t$  с периодом  $T$  равномерно по отношению к  $x \in U_\rho$ , или

б) в уравнениях (30.4) функции  $W(t, \varphi, b)$ ,  $B(t, \varphi, b)$  имеют вид:

$$W(t, \varphi, b) = \bar{W}(t, \varphi + vt, b),$$

$$B(t, \varphi, b) = \bar{B}(t, \varphi + vt, b),$$

причем функции  $\bar{W}(t, \varphi, b)$ ,  $\bar{B}(t, \varphi, b)$  обладают по отношению к  $t$  периодом  $T$  равномерно относительно  $\varphi, b$ .

Тогда можно указать такое достаточно малое положительное число  $\varepsilon'$  и положительное  $\sigma_0$  ( $\sigma_0 < \rho$ ), что при любом положительном  $\varepsilon < \varepsilon'$  уравнение (30.81) имеет единственное интегральное многообразие  $S_t$ , лежащее для всех вещественных  $t$  в области  $U_\varepsilon$ , удовлетворяющее результатам 2) и 3) теоремы II, в которых следует положить  $m = 2$ .

Поведение решений

$$x = f(t, \theta),$$

где  $\theta$  определяется из уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta)$$

(причем  $f(t, \theta)$  и  $F(t, \theta)$  являются периодическими функциями по  $t$  с периодом  $T$ , не зависящим от  $\theta$ ), характеризуется числом  $v$  и может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi(\alpha_e t, \alpha_p t + \psi), \psi = \text{const},$$

где  $\alpha_e = \frac{2\pi}{T}$  — («внешняя» частота),  $\alpha_p = \frac{2\pi}{T} v$  — («собственная» частота), а  $\Phi(\varphi, \psi)$  — непрерывная функция угловых переменных  $\varphi, \psi$  с периодом  $2\pi$ .

Таким образом, если  $v$  иррационально, каждое из решений  $x(t)$ , лежащее на интегральном многообразии  $S_t$ , является квазипериодической функцией  $t$  с двумя основными частотами  $\alpha_e$  и  $\alpha_p$ ; если  $v$  рационально, то на интегральном многообразии  $S_t$  существуют периодические решения с этими же основными частотами, и любое непериодическое решение, лежащее на интегральном многообразии  $S_t$ , приближается к одному из таких периодических решений при  $t \rightarrow \infty$ .

В случае выполнения условия а) имеет место неравенство

$$|\alpha_p - \varepsilon\omega| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0;$$

в случае выполнения условия б) — неравенство

$$|\alpha_p - v - \varepsilon\omega| \leq \varepsilon\delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0.$$

Пусть в дополнение к уже наложенным условиям все  $n-1$  рассматриваемых характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части.

Тогда любое решение уравнения (30.81), проходящее при  $t = t_0$  через какую-либо точку области  $U_\varepsilon$ , приближается при  $t \rightarrow \infty$  к одному из стационарных решений (к квазипериодическому решению в случае иррационального  $v$  или к периодическому решению в случае рационального  $v$ ).

Укажем в заключение ряд приложений теорем I, II, III к теории нелинейных колебаний в системах с одной степенью свободы.

Начнем с рассмотрения свободных колебаний, характеризуемых дифференциальным уравнением вида (1.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

с малым положительным параметром  $\varepsilon$ .

Тогда уравнение первого приближения для амплитуды колебаний будет (1.24):

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a),$$

причем на основании (1.27)

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi.$$

Покажем теперь, что с помощью теоремы I и сделанного к ней примечания можно строго установить те результаты, относящиеся к свойствам периодичности и устойчивости, которые были получены в главе I для приближенных решений.

Для этого совершим в уравнении (1.1) замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \phi, \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \phi. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega a} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi, \end{aligned} \right\} \quad (30.82)$$

откуда

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2} \frac{f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi}{1 - \frac{\varepsilon}{a\omega^2} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi}. \quad (30.83)$$

Таким образом, приходим к уравнению вида (26.1). Соответствующее уравнение первого приближения (26.2) будет:

$$\frac{da}{d\psi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi,$$

т. е.

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{\omega} A_1(a).$$

Пусть уравнение

$$A_1(a) = 0$$

имеет нетривиальное решение

$$a = a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

для которого

$$A'_1(a_0) \neq 0.$$

Предположим также, что функция  $f(x, x')$  на плоскости  $(x, x')$  непрерывна со своими частными производными первого порядка в окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{x'^2}{\omega^2} = a_0^2. \quad (30.84)$$

Тогда на основании упомянутой теоремы можем утверждать, что при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  точное уравнение (30.83) имеет периодическое решение

$$a = a_0(\psi)$$

с периодом  $2\pi$ , близкое к  $a_0$ . Это решение будет устойчиво в случае

$$A'_1(a_0) < 0 \quad (30.85)$$

и обладает свойством притяжения близких решений.

В случае

$$A'_1(a_0) > 0 \quad (30.86)$$

оно неустойчиво и обладает свойством отталкивания.

Принимая во внимание сделанную замену переменных и второе из уравнений (30.82), видим, что рассматриваемое уравнение (1.1) имеет при достаточно малых  $\varepsilon$  предельный цикл, соответствующий периодическому решению, близкий к эллипсу (30.84). При условии (30.85) этот предельный цикл будет устойчивым, при условии (30.84) — неустойчивым.

Это как раз те выводы, которые были сделаны в излагавшейся ранее приближенной теории.

Перейдем теперь к исследованию колебательных систем, описываемых более общим уравнением (13.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

в котором  $f\left(\theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$  является периодической функцией  $\theta$  с периодом  $2\pi$ .

Рассмотрим сначала случай резонанса, когда

$$\omega^2 = \left( \frac{p}{q} \nu \right)^2 + \varepsilon \Delta,$$

где  $p, q$  — взаимно простые числа.

Соответствующие уравнения первого приближения будут:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \vartheta), \quad (30.87)$$

где в силу (13.14), (14.23) имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} f_0 \left( a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) \sin \left( \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) dt, \\ B_1(a, \vartheta) &= \frac{\Delta q}{2p\nu} - \frac{1}{2\pi p a} \int_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} f_0 \left( a, \nu t, \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) \cos \left( \frac{p}{q} \nu t + \vartheta \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (30.88)$$

Чтобы воспользоваться нашими теоремами, совершим в основном уравнении (13.1) замену переменных:

$$x = \xi \cos \frac{p}{q} \nu t + \eta \sin \frac{p}{q} \nu t, \quad \frac{dx}{dt} = -\xi \frac{p}{q} \nu \sin \frac{p}{q} \nu t + \eta \frac{p}{q} \nu \cos \frac{p}{q} \nu t, \quad (30.89)$$

приведя его к системе в стандартной форме:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(t, \xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon Y(t, \xi, \eta), \quad (30.90)$$

где

$$X(t, \xi, \eta) = -\frac{F(t, \xi, \eta) \sin \frac{p}{q} \nu t}{\frac{p}{q} \nu}, \quad Y(t, \xi, \eta) = \frac{F(t, \xi, \eta) \cos \frac{p}{q} \nu t}{\frac{p}{q} \nu},$$

$$F(t, \xi, \eta) = f \left( \nu t, \xi \cos \frac{p}{q} \nu t + \eta \sin \frac{p}{q} \nu t, -\xi \frac{p}{q} \nu \sin \frac{p}{q} \nu t + \eta \frac{p}{q} \nu \cos \frac{p}{q} \nu t \right) - \Delta \left( \xi \cos \frac{p}{q} \nu t + \eta \sin \frac{p}{q} \nu t \right).$$

Как видно, правые части уравнений (30.87) являются периодическими функциями  $t$  с периодом  $\frac{2\pi q}{\nu}$ .

Заметим также, что уравнения первого приближения, соответствующие системе (30.90):

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\nu}{2\pi q} \int_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} X(t, \xi, \eta) dt,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon \frac{\nu}{2\pi q} \int_0^{\frac{2\pi q}{\nu}} Y(t, \xi, \eta) dt,$$

эквивалентны уравнениям (30.87) и переходят в них посредством замены  
 $\xi = a \cos \vartheta, \quad \eta = -a \sin \vartheta.$

Предположим, что уравнения (30.87) имеют постоянное решение

$$a = a_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad (30.91)$$

и что в окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{x'^2}{\left(\frac{p}{q}\vartheta\right)^2} = a_0^2 \quad (30.92)$$

функция  $f(t, x, x')$  непрерывна со своими частными производными первого порядка по  $x, x'$ .

Пусть, далее, оба корня характеристического уравнения, соответствующего уравнениям в вариациях для решения (30.81), имеют отрицательные вещественные части.

Тогда, очевидно, условия теоремы I выполнены.

Принимая во внимание установленные в ней свойства, можем утверждать, что в рассматриваемом случае, при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (13.1) имеет периодическое решение с периодом  $\frac{2\pi q}{\sqrt{v}}$ , близкое к гармоническому

$$a_0 \cos\left(\frac{p}{q}\sqrt{v}t + \varphi_0\right).$$

Любое решение, проходящее через точку некоторой окрестности эллипса (30.92), будет асимптотически приближаться к периодическому решению при  $t \rightarrow +\infty$ .

Пусть теперь уравнения первого приближения имеют периодическое решение с характеристическим показателем, вещественная часть которого отлична от нуля, и пусть функция  $f(t, x, x')$  в некоторой окрестности орбиты этого решения обладает непрерывными частными производными по  $x, x'$  до второго порядка включительно.

В этом случае условия теоремы II и теоремы III (с условием а)) выполнены.

Поэтому можем утверждать, например, что при достаточно малых  $\varepsilon$  в некоторой окрестности указанной орбиты имеются стационарные решения, обладающие двумя основными частотами: «собственной» и «вынужденной». При иррациональном отношении этих частот стационарные решения квазипериодичны, при рациональном — периодичны.

В случае, когда вещественная часть характеристического показателя положительна, стационарные решения неустойчивы. Если, наоборот, эта вещественная часть отрицательна, всякое решение уравнения (13.1), для которого при каком-либо  $t_0$  точка

$$\xi(t) = x(t) \cos \frac{p}{q}\sqrt{v}t - \frac{x'(t)}{\frac{p}{q}\sqrt{v}} \sin \frac{p}{q}\sqrt{v}t,$$

$$\eta(t) = x(t) \sin \frac{p}{q}\sqrt{v}t + \frac{y'(t)}{\frac{p}{q}\sqrt{v}} \cos \frac{p}{q}\sqrt{v}t$$

лежит достаточно близко около указанной орбиты, асимптотически приближается к стационарному для  $t \rightarrow +\infty$ .

Перейдем теперь к рассмотрению нерезонансного случая, когда уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a), \quad (30.93)$$

где  $A_1(a)$ ,  $B_1(a)$  определяются формулами (13.15), (13.35):

$$A_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi d\theta,$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi d\theta.$$

Для удобства применения теорем II, III совершим в уравнении (13.1) замену переменных:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Получим уравнения в стандартной форме:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(vt, \omega t + \varphi, a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(vt, \omega t + \varphi, a), \quad (30.94)$$

где

$$A(\theta, \phi, a) = -\frac{1}{\omega} f(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \sin \phi,$$

$$B(\theta, \phi, a) = -\frac{1}{\omega a} f(\theta, a \cos \phi, -a\omega \sin \phi) \cos \phi.$$

Правые части этих уравнений являются, как видно, квазипериодическими функциями  $t$  с двумя основными частотами —  $\omega$  и  $v$ .

Если отношение этих частот иррационально, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(vt, \omega t + \varphi, a) dt &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\theta, \phi, a) d\theta d\phi = A_1(a), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(vt, \omega t + \varphi, a) dt &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\theta, \phi, a) d\theta d\phi = B_1(a). \end{aligned} \right\} \quad (30.95)$$

Заметим, что эти равенства могут выполняться не только при иррациональном значении отношения  $\frac{\omega}{v}$ .

Возьмем, например, случай, рассматривавшийся в главе III, когда  $f(vt, x, x')$  представляется конечной суммой вида

$$\sum_{-N}^N e^{inx} f_n(x, x'),$$

в которой  $f_n(x, x')$  — полиномы по отношению к  $x, x'$ .

Как легко видеть, в этом случае можно указать конечную совокупность рациональных чисел таким образом, что если  $\frac{\omega}{v}$  не равно одному из чисел этой совокупности, то равенства (30.95) выполняются.

Пусть так или иначе справедливость этих равенств обеспечена.

Тогда уравнения (30.93) оказываются уравнениями первого приближения (усредненными уравнениями) для системы (30.94).

Предположим, что уравнение

$$A_1(a) = 0$$

имеет нетривиальное решение:

$$a = a_0 \neq 0,$$

для которого

$$A'_1(a) \neq 0.$$

Предположим также, что функция  $f(\theta, x, x')$  обладает непрерывными частными производными по  $x, x'$  до второго порядка включительно в некоторой окрестности эллипса

$$x^2 + \frac{x'^2}{\omega^2} = a_0^2.$$

В таком случае, как видно, выполнены условия теоремы II и теоремы III (условие б)).

Следовательно, можем утверждать, что для достаточно малых значений  $\varepsilon$  уравнение (13.1) действительно имеет стационарные решения с амплитудой, близкой к  $a_0$ , которые как функции  $t$  обладают двумя основными частотами — собственной и вынужденной.

При

$$A'_1(a_0) > 0$$

семейство стационарных решений обладает свойством отталкивания, а при

$$A'_1(a_0) < 0$$

— свойством притяжения близких решений.

Интересно отметить, что наложенные условия, обеспечивающие возможность применения теорем II, III, являются настолько общими, что при их выполнении даже ряд (13.46), входящий в улучшенное первое приближение, может оказаться расходящимся\*).

Мы рассмотрели вопросы об установлении свойств точных решений по свойствам решений уравнений первого приближения.

В ряде случаев, однако, может представить интерес использование для этой цели уравнений более высокого приближения.

Так, например, вещественные части характеристических показателей могут обратиться в нуль для уравнений первого приближения.

Может также возникнуть вопрос о теоретической оценке погрешности для асимптотического приближения высшего порядка.

Для таких случаев нетрудно обобщить методику изложенную в § 29, например, с помощью использования выражений улучшенного  $m$ -го приближения как формул замены переменных. Тогда придем к системе типа (27.105), в которой «дополнительные члены»  $P, Q$  будут уже величинами порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ , что, разумеется, соответственно повышает порядок полученных оценок.

Естественно, что такое рассмотрение требует наложения более жестких условий на характер регулярности функций, входящих в исследуемые дифференциальные уравнения.

---

\* ) Из-за наличия «малых делителей» вида  $\omega^2 - (na + mw)^2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А н д р о п о в А. А., Собрание трудов, Изд. АН СССР, 1956.
2. А н д р о н о в А. А. и Х а й к и н С. Э., Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
3. А с е е в Б. П., Основы нелинейной радиотехники, М., 1943.
4. В а н - д е р - П о л ъ Б., Нелинейная теория электрических колебаний, Связьиздат, 1935.
5. Б е р г А. И., Теория и расчет ламповых генераторов, Госэнергоиздат, 1932.
6. Б о г о л ю б о в Н. Н., Колебания, Механика в СССР за 30 лет, Гостехиздат, 1950.
7. Б о г о л ю б о в Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, 1945.
8. Б о г о л ю б о в М. М., Сінхронізація реляксаційних коливань, Наукові записи Київського Держуніверситету 9, вип. IX, Математичний збірник № 6 (1950).
9. Б о г о л ю б о в Н. Н., Теория возмущений в нелинейной механике, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР № 14 (1950).
10. Б о г о л ю б о в Н. Н. и З у б а р е в Д. Н., Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле, УМЖ, VII (1955).
11. Б у л г а к о в Б. В., Колебания, Гостехиздат, М., 1954.
12. 1-я Всесоюзная конференция по колебаниям (доклады, резолюции и материалы конференции), ГТТИ, 1933.
13. Д е н - Г а р т о г, Теория колебаний, Гостехиздат, 1942.
14. D u f f i n g G., Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz, Braunschweig, 1918.
15. Д о р о д н и ц и н А. А., Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля, Прикладная математика и механика, XI (1947).
16. Журнал технической физики, том IV, вып. I (1934) (весь выпуск посвящен вопросам нелинейной радиотехники).
17. К р и л о в М. М. и Б о г о л ю б о в М. М., Про деякі формальні розклади нелінійної механіки, Изд. АН УРСР, 1934.
18. К р и л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н., Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов, ч. I, ОНТИ, 1934.
19. К р и л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н., Символические методы нелинейной механики в их приложении к исследованию резонанса в электронном генераторе, Изд., АН УССР, 1934.
20. К р и л о в М. М. и Б о г о л ю б о в М. М., Основні проблеми нелінійної механіки, Изд. АН УРСР, 1934.
21. К р и л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, Изд. АН УССР, 1934.
22. К р и л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, 1937.
23. К р и л о в Н. М. и Б о г о л ю б о в Н. Н., Méthodes approchées de la Mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant (Monographie en français), Клев, 1935.
24. L e f s c h e t z S., Lectures on Differential Equations, Princeton Univ. Press., 1946.
25. L e f s c h e t z S., Differential Equations: Geometric Theory, London, 1957.
26. L i é n a r d A., Étude des oscillations entretenues, Rev. gén. d'Électr. (1928).
27. Л я п у н о в А. М., Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
28. М а л к и н И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

29. Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, Изд. АН СССР, 1948—1952.
  30. Миногорский N., Introduction to Non-linear Mechanics, Ann. Arbor, Mich., 1947.
  31. Митропольский Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд. АН УССР, 1955.
  32. Нелинейные системы, Сборник статей под редакцией акад. М. В. Шулейкина, Связьиздат, 1939.
  33. Немецкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
  34. «Основы автоматического регулирования. Теория», под редакцией В. В. Солодовникова, Гостехиздат, 1954.
  35. Папалекси Н. Д., Собрание трудов, Изд. АН СССР, 1948.
  36. Писаренко Г. С., Колебание упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале, Изд. АН УССР, 1955.
  37. Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947.
  38. Poinsagé H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, Gauthier-Villars, vol. I (1892); vol. II (1893); vol. III (1899).
  39. Sansone G. e Conti R., Equazioni differenziali non lineari, Roma, 1956.
  40. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1953.
  41. Сузант А. Е., Введение в нелинейную радиотехнику, 1934.
  42. Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1952.
  43. Тихонов А. Н., О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Матем. сб. 22 (64), 193—204 (1948).
  44. Харкевич А. А., Автоколебания, Гостехиздат, 1954.
  45. Четаев Н. Г., Устойчивость движений, Гостехиздат, 1946.
  46. Челомей В. Н., О колебаниях стержней, подверженных действию периодически меняющихся продольных сил, Труды КАИ, вып. VIII, 1937.
  47. Челомей В. Н., О динамической устойчивости элементов авиационных конструкций; Журнал «Гражданская авиация», № 12 (1940).
  48. Штокало И. З., Критерий устойчивости и неустойчивости решений, линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Матем. сб., новая серия, т. 19, вып. 2 (1946).
  49. Хаяси Тихиро, Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, 1957.
-

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	5
Предисловие к первому изданию . . . . .	6
Введение . . . . .	7
Г л а в а I. Собственные колебания в системах, близких к линейным . . . . .	36
§ 1. Построение асимптотических решений . . . . .	36
§ 2. Консервативные системы, близкие к линейным . . . . .	49
§ 3. Случай нелинейного трения . . . . .	60
§ 4. Автоколебательные системы . . . . .	68
§ 5. Стационарные амплитуды и их устойчивость . . . . .	76
§ 6. Построение стационарных решений . . . . .	86
§ 7. Эквивалентная линеаризация нелинейных колебательных систем . . . . .	93
§ 8. Нелинейные колебательные системы с медленно меняющимися параметрами . . . . .	107
Г л а в а II. Метод фазовой плоскости . . . . .	116
§ 9. Траектории на фазовой плоскости. Особые точки . . . . .	116
§ 10. Метод Льепара . . . . .	133
§ 11. Релаксационные колебательные системы . . . . .	144
§ 12. Метод А. А. Дородницына для уравнения Ван-дер-Поля . . . . .	148
Г л а в а III. Влияние внешних периодических сил . . . . .	155
§ 13. Асимптотические разложения в «нерезонансном» случае . . . . .	155
§ 14. «Резонансные» случаи . . . . .	170
§ 15. Воздействие синусоидальной силы на нелинейный вибратор . . . . .	185
§ 16. Воздействие синусоидальной силы на нелинейную систему с характеристикой, составленной из прямолинейных отрезков . . . . .	198
§ 17. Параметрический резонанс . . . . .	209
§ 18. Воздействие периодических сил на релаксационную систему . . . . .	221
§ 19. Воздействие «периодических» сил на нелинейные системы с медленно меняющимися параметрами . . . . .	232
Г л а в а IV. Одночастотные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы . . . . .	247
§ 20. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы . . . . .	247
§ 21. Собственные одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы, описываемые системой дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	259
§ 22. Влияние внешних периодических сил на одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы . . . . .	270
§ 23. Исследование одночастотных колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы при наличии медленно меняющихся параметров . . . . .	281

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Г л а в а V. Метод усреднения . . . . .</b>	<b>297</b>
§ 24. Уравнения первого и высших приближений в методе усреднения . . . . .	297
§ 25. Случай быстро вращающейся фазы . . . . .	315
<b>Г л а в а VI. Обоснование асимптотических методов . . . . .</b>	<b>327</b>
§ 26. Обоснование метода усреднения . . . . .	327
§ 27. Преобразование основной системы уравнений . . . . .	332
§ 28. Некоторые свойства решений преобразованных уравнений в окрестности точек равновесия и замкнутых орбит . . . . .	355
§ 29. Соответствие между точными и приближенными решениями основного уравнения на бесконечном интервале . . . . .	379
§ 30. Периодические и почти периодические решения . . . . .	386
<b>Литература . . . . .</b>	<b>407</b>

---